6-7 кл., базовый вариант

26 *февраля* 2023 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы	*Задачи*
1 2	1. а) Из 27 кубиков размерами 1×1×1 склеили кубик 3×3×3. Для склеивания каждой пары граней у двух соседних кубиков потратили одну капельку клея. Сколько всего было использовано капелек клея? б) Тот же вопрос для 125 кубиков размерами 1×1×1, из которых склеили кубик 5×5×5.
1 3	2. В кабинете сидят N неряx, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столе у каждого будет таким же, как и до обеда, если а) N = 2; б) N = 6?
2 2	3. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом сделали тоже самое, потом еще раз и т.д. Докажите, что, повторив такую операцию не более чем 100 раз, мы получим: а) двузначное число; б) число 0.
2 3	4. а) Дан квадрат 5×5, изначально ни одна из его клеток не закрашена. Клетку можно закрасить в черный цвет, если среди соседних по стороне с нею клеток четное число закрашенных. Можно ли закрасить все клетки в черный цвет? б) Предположим теперь, что изначально центральная клетка квадрата 5×5 закрашена в черный цвет, а остальные клетки белые. Теперь клетку можно закрасить в черный цвет, если среди соседних по стороне с нею клеток нечетное число закрашенных. Можно ли теперь закрасить все клетки в черный цвет?
6	5. На столе лежат 25 игральных кубиков. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. В кабинете сидят N неряx, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столе у каждого будет таким же, как и до обеда, если

1 а) $N = 2$;

3 б) $N = 10$?

4 2. В треугольнике ABC провели медианы BK и CN, пересекающиеся в точке M. Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

5 3. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

5 4. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$.
(Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти

2 а) 13 настоящих монет;

3 б) 15 настоящих монет;

2 в) 17 настоящих монет?

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

4 2. Дано натуральное число n. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$.

(Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

5 3. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, N — основание биссектрисы угла B. Касательная к описанной окружности треугольника AIN в вершине A и касательная к описанной окружности треугольника CIN в вершине C пересекаются в точке D. Докажите, что прямые AC и DI перпендикулярны.

5 4. Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ состоят из положительных чисел. Известно, что отношение a_k/b_k целое при любом k. Верно ли, что это отношение не зависит от k?

5. Даны 5 точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены

3 а) на плоскости;

3 б) в пространстве?