СОРОК ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **Весенний тур**

6-7 кл., **сложный вариант** 12 марта 2023 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы	***Задачи***
3	1. Найдите количество пар (a, b) различных натуральных чисел, каждое которых не более 100 и таких, что сумма $a + b$ является четным числом (пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми). Ответ обоснуйте.
4	2. Найдите сумму квадратов всех цифр всех натуральных чисел от 1 до 2023.
6	3. В N-м Турнире городов в Минске принимали участие школьники из разных школ. Все они писали олимпиаду в главном корпусе БГУ. Известно, что седьмая часть всех школьников поместилась на шестом этаже, еще 45 на пятом этаже, остальные в нескольких кабинетах на третьем этаже, в каждом из которых поместились по $\frac{1}{11}$ от общего количества школьников. Сколько школьников могло быть на Турнире городов в Минске? (Найдите все возможности и объясните.)
 2 **5**	4. В примере $\underbrace{\text{ЛОЖЬ} + \text{ЛОЖЬ} + \cdots + \text{ЛОЖЬ}}_{\text{20 слагаемых}} = \text{ПРАВДА}$ различным буквам соответствуют различные цифры, а одинаковым буквам – одинаковые цифры. а) Хотя бы для трех букв этого примера найдите соответствующие им цифры. б) Чему равно значение суммы В+О+Ж+Д+Ь, если вместо букв подставить соответствующие им цифры?
 3 **4**	5. В зрительном зале кинотеатра «Пионер» 20 рядов по 20 мест (сидений) в каждом. Все ряды и все места в каждом ряду пронумерованы натуральными числами от 1 до 20. Поначалу все места свободны. Зрители приходят в зал по очереди и занимают места по следующему правилу: каждый очередной зритель садится на любое свободное место в зале, но как только он садится, один из его соседей по ряду (т.е. с номером места, отличающимся на 1 от номера его места, если, конечно, такой имеется) немедленно встает и пересаживается на другое место по тому же правилу. Так повторяется несколько раз. Организаторы стремятся к тому, чтобы к началу сеанса максимальное число мест было занято. А) Какое наибольшее число мест в первом ряду может быть занято? Укажите это число и опишите порядок рассаживания и пересаживания зрителей, при котором оно может быть достигнуто. Б) Какое наибольшее число мест во всем зале может быть занято, если дополнительно требуется, чтобы в каждой «колонне» зала было по крайней мере одно свободное место? (Под колонной понимается множество из двадцати сидений, располагающихся в разных рядах, но с одинаковыми номерами мест.)
10	6. Высоты BP и CQ треугольника ABC пересекаются в точке H. Оказалось, что $BH = AC$. Найдите все возможные значения угла ABC.
 1 **4** **5** **5**	7. Егор написал на доске натуральное число $n \geq 100$, не содержащее в своей десятичной записи нулей. Потом во вторую строчку он выписал все числа, состоящие из первых нескольких подряд идущих цифр числа n (при этом все выписанные числа не равны n, например, для $n = 12345$ это 1,12,123,1234), и точно также из нескольких последних (например, для 12345 это 5,45,345,2345). Оказалось, что одно из чисел второй строки делится на все числа этой строки. а) Приведите пример такого числа n. б) Найдите все трехзначные числа n, удовлетворяющие описанному условию. в) Докажите, что число n не может состоять из пяти и более цифр. г) Существуют ли четырехзначные числа n, удовлетворяющие этому условию?

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

5 2. На клетчатой доске 10×10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

7 3. Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

8 4. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше $120°$, а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

8 5. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 чисел – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

6. Пусть X — некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N — нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если

4 а) $N = 2$;

4 б) $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

10 7. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается или вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) любое количество одинаковых букв, или убрать из последовательности любое количество подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.
5	2. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC, продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q. Прямая, проходящая через середины сторон AB и AC, пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y. Найдите длину отрезка XY.
6	3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x)+3$ имеет n различных действительных корней.
8	4. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.
8	5. Дано целое число $h > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна h. Скажем, что число h *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше h, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что h замечательное тогда и только тогда, когда оно простое. (Напомним, что у обыкновенной дроби числитель целый, а знаменатель натуральный.)
10	6. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Обязательно ли тогда этот тетраэдр правильный?
12	7. На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих пяти цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов между собой, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов, кусая только друг друга, смогут стать синими? (Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и т. д. Правила смены цветов могут быть другими.)