(5) 6 – 7 класс **Предварительные решения**

заданий 6-7 класса 45-го Тур Гор (*осень базовый тур от* **15 окт 2023 г.)**

1. Взяли все 6-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 (цифры в этих числах могут повторяться). Сколько из этих чисел делятся на 8?

Ответ: $6^3 \times 3^3 = 2^3 \times 3^6 = 5832$.

Решение. В решении совмещаются свойства делимости на 8 и элементы комбинаторики. Учитывая, что число1000 делится нацело на 8, достатчоно посчитать количество трехзначных чисел, кратных 8, а их 27 (по 5 в каждой сотне, начинающейся на четную цифру, и по 4 в каждой сотне, начинающейся на нечетную).

Осталось понять, что в разрядах тысяч, десятков тысяч и сотне тысяч может стоять любая из шести заданных цифр, т.е. всего различных вариантов будет равно 6^3, и в каждом из этих вариантов расположения цифр в разрядах тысяч, десятков и стоен тысяч по 27 чисел, кратных 8.

2. А) У трех фермеров есть клетчатое поле 3×3, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 3 участка равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 4 ягоды так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Б) Решите такую же задачу для четырех фермеров, у которых поле 4×4, они делят его на 4 равных по площади участка (многоугольника), а ворона хочет утащить незаметно для фермеров 5 ягод..

Ответ и решение. А) Да, Б) Да.

В обоих вариантах важно понять, во-первых, что значит поле, «сплошь заросшее ягодами», а во-вторых, что линии сетки могут быть границами участков, и тогда фермеры не следят за ними, но могут проходить внутри, тогда – следят. Хоть мы и не знаем границ, но можем заметить, что узлы сетки (т.е. точки пересечения линий сетки) лежат внутри участка одного фермера, если квадрат 2×2 с таким узлом внутри целиком принадлежит одному фермеру.

В пункте А) участки фермеров состоят из трех клеток, поэтому они не могут содержать узлы сетки внутри своих участков. Но на поле 3×3 всего 4 узла, и этого достаточно для вороны.

В пункте Б) можно разбить все поле на 4 квадрата 2×2, и ворона может взять ягоды, лежащие в узлах сетка внутри этих 4 квадратов, а также в центральном узле всего квадрата 4×4. При таком выборе ягод ни один фермер не может заметить пропажу двух ягод, ибо никакие два из описанных центров не могут лежать внутри одного участка.

3. Пятиклассник Вася утверждает, что он может записать не менее восьми чисел, удовлетворяющих условиям. Наименьшее общее кратное всех этих чисел равно 462. Для любых двух чисел их наименьшее общее кратное меньше 250. Если эти числа перемножить и умножить на 4, то в результате получится куб некоторого натурального числа. Прав ли Вася?

Ответ. Да, 1 2 3 7 11 21 33 77.

Решение. 462=2*3*7*11. Значит можно записать только числа 1, 2, 3, 7, 11, 2*3, 2*7, 2*11, 3*7, 3*11, 7*11, 2*3*7, 2*3*11, 2*7*11, 3*7*11. Все они меньше 250. Но заметим, что если взять 2*3*7, то из записанных чисел нужно удалить все числа, кратные 11. Иначе будет существовать два числа с наименьшим общим кратным большим 250. Аналогично, для других тройных произведений. Двойные произведения разделим на пары 2*7 и 3*11, 2*3 и 7*11, 2*11 и 3*7. По одному числу в паре нужно удалить. С учетом последнего условия задачи удаляются четные числа.

4. А) На асфальте нарисована полоса 1×6 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 5 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

5. Б) Тот же вопрос для игры на полосе 1×10 и 9 прыжков девочек.

Ответ: А) обязательно, Б) нет.

Решение. В обоих пунктах первый и последний ход (прыжки) девочек одинаковые, а значит, кроме исходного и конечного полей (позиций, где находятся девочки), у них будут совпадать ***второе*** (т.е. после первого прыжка) и предпоследнее – пятое; будем их называть позициями.

Отсюда идея доказательства в пунтке А): если второй прыжок у них в разные стороны от ***второго поля***, но одинаковые по длине, то их третьи поля (позиции) будут симметричны относительно второго. На третий прыжок они могут поменяться местами (других свободных полей уже нет), а на 4-м прыжке обе должны попасть в 5-ю позицию, что невозможно, ибо это означает, что они должны попаст в 5-ю позицию с полей 3 и 4, которые симметричны позиции 2, а значит, несимметричны позиции 5. Аналонично, если девочки прыгнут симметрично на 4-м прыжке.

Эту идею можно реализовать алгебраически, если ввести целочисленные координаты для клеток (позиций) на полоске.

Для пункта Б) есть последовательности прыжков девочек необходимых для решения. В следующем примере указаны номера прыжков после которых девочки будут попадать в соответствующую позицию на полоске::

Аня: 1-2-4-3-5-7-8-6-9-10,

Варя: 1-2-5-3-4-6-8-7-9-10.

Есть и другие варианты последовательностей требуемых прыжков у девочек.

5. Петя и Вася нашли 20 кубиков одинакового размера, 10 из них были белого цвета и 10 — чёрного. Они придумали такую игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 20 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Ответ: Вася может обеспечить себе победу.

Решение. Назовем башенку плохой белой или черной, если у нее верхний и нижний кубики одного – соответствующего цвета. В частности, каждый кубик изначально является плохой башенкой. Если у башенки наверху черный кубик, а внизу белый, то назовем ее хорошей башенкой 1 типа, а если наверху белый кубик, в внизу черный – то хорошей башенкой 2 типа.

Заметим, что хорошие башенки разных типов не ставятся друг на друга, а из двух башенок одного типа можно сделать башенку того же типа. А плохая башенка может совмещаться с хорошей, при этом получается плохая башенка того же цвета, которого была исходная.

Опишем, как Вася может обеспечить себе победу. Общая идея такова: после каждого Васиного хода должно оставаться по одной хорошей башенки каждого типа, а плохих – четное число, причем поровну – белых и черных (для знатоков – это выигрышная позиция для Васи).

1) Своим первым ходом Петя создает из двух кубиков разных цветов хорошую башенку 1-го или 2-го типа, в ответ Вася создает хорошую башенку противоположного типа тоже из двух кубиков разных цветов. При этом использовано по два кубика (плохих башенок) разных цветов, а появились по одной башенке каждого типа.

2) Пусть теперь было сделано k ходов, после которых осталось по одной хорошей башенки каждого типа, а плохих – четное число, причем поровну – белых и черных. Далее у Пети две возможности:

- сделать из двух плохих башенок разного цвета хорошую m-го типа; в ответ Вася объединит две башенки одного типа в одну – того же типа. Получится выигрышная позиция для Васи.
- объединить плохую башенку некоторого цвета и хорошую башенку m-го типа в плохую башенку того же цвета; в ответ Вася, используя плохую башенку другого цвета (а она есть!) и полученную Петей, в хорошую башенку m-го типа. Вновь получится выигрышная позиция для Васи.

Таким образом, в обоих случаях после ходов Пети и Вася уйдут две плохие башенки разных цветов, а хороших будет две разного типа. За конечное число ходов все плохие башенки закончатся, и останутся две хорошие разных типов – у Пети больше нет ходов – он проиграл!

8 – 9 класс **Предварительные решения**

заданий 8-9 класса 45-го Тур Гор (*осень базовый тур от* **15 окт 2023 г.)**

1. На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

   Ответ: нет, необязательно. (ср. ответ и решение с этой задачей в 6-7 кл.)
   Решение. Есть последовательности прыжков девочек необходимых для решения. В следующем примере указаны номера прыжков после которых девочки будут попадать в соответствующую позицию на полоске::
   Аня: 1-2-4-3-5-7-8-6-9-10,
   Варя: 1-2-5-3-4-6-8-7-9-10.
   Есть и другие варианты последовательностей требуемых прыжков у девочек (еще один вариант из решения одного из участников представлен в фото – там где 3-я задача).

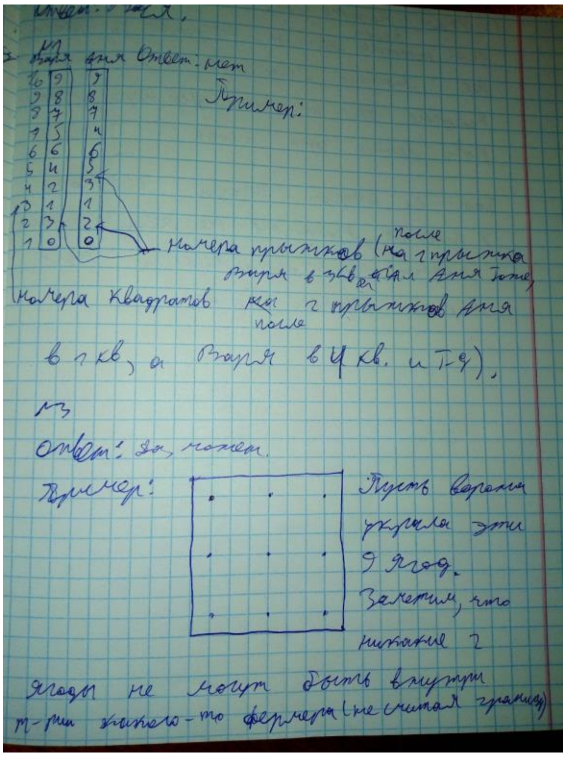
2. Четырёхугольник ABCD выпуклый, его стороны AB и CD параллельны. Известно, что углы DAC и ABD равны, а также углы CAB и DBC равны. Обязательно ли ABCD — квадрат?

Ответ: **нет, необязательно.**
Решение. Легко видеть, что ABCD – равнобедренная трапеция (есть параллельность двух сторон и углы при вершинах A и B равны). При этом несложно, взяв равными все 4 угла указанные в условии (например, по 30 или по 50 градусов), увидеть, что ABCD именно трапеция, но не квадрат.

3. У трех фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягоды так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Ответ и решение. **Да.**

Важно понять, во-первых, что значит поле, «сплошь заросшее ягодами», а во-вторых, что линии сетки могут быть границами участков, и тогда фермеры не следят за ними, но могут проходить внутри, тогда – следят. Хоть мы и не знаем границ, но можем заметить, что узлы сетки (т.е. точки пересечения линий сетки) лежат внутри участка одного фермера, если квадрат 2×2 с таким узлом внутри целиком принадлежит одному фермеру.



На фото представлен один из вариантов, как ворона может утащить 9 ягод. При таком выборе ягод ни один фермер не может заметить пропажу двух ягод, ибо тогда его поле должно содержать два «не связанных между собой» квадрата 2×2, а это уже 8 клеток и «не многоугольник».

4. По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

Ответ. Нет, не может.

Решение. По сути в решении есть две важные идеи: кратность 3 и четность количества записанных чисел.

Если чисел четное число, то разобьем их на пары. В каждой паре есть числа вида x и 2x, или y и 5y. В любом случае их сумма кратна 3, а, значит, и сумма всех записанных чисел кратна 3, но число 2023 не делится нацело на 3.

Покажем, что записано действительно четное количество чисел. Выберем наименьшее из записанных m (если их несколько, то возьмем любое из них). Будем двигаться по кругу от выбранного числа, наблюдая за теми числами (по существу операциями умноженияи или деления на 2 или 5), которые встречаются по ходу движения. Начав с выбранного числа m, и вернувшись по кругу к нему же, мы поймем, что количество операций было четное число (сколько раз домножали на 2, столько же и делили, аналогично про операцию с числом 5).

Доказательство завершено.

5. Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 — чёрного. Они придумали такую игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Ответ: Вася может обеспечить себе победу.

Решение. Назовем башенку плохой белой или черной, если у нее верхний и нижний кубики одного – соответствующего цвета. В частности, каждый кубик изначально является плохой башенкой. Если у башенки наверху черный кубик, а внизу белый, то назовем ее хорошей башенкой 1 типа, а если наверху белый кубик, в внизу черный – то хорошей башенкой 2 типа.

Заметим, что хорошие башенки разных типов не ставятся друг на друга, а из двух башенок одного типа можно сделать башенку того же типа. А плохая башенка может совмещаться с хорошей, при этом получается плохая башенка того же цвета, которого была исходная.

Опишем, как Вася может обеспечить себе победу. Общая идея такова: после каждого Васиного хода должно оставаться по одной хорошей башенки каждого типа, а плохих – четное число, причем поровну – белых и черных (для знатоков – это выигрышная позиция для Васи).

1) Своим первым ходом Петя создает из двух кубиков разных цветов хорошую башенку 1-го или 2-го типа, в ответ Вася создает хорошую башенку противоположного типа тоже из двух кубиков разных цветов. При этом использовано по два кубика (плохих башенок) разных цветов, а появились по одной башенке каждого типа.

2) Пусть теперь было сделано k ходов, после которых осталось по одной хорошей башенки каждого типа, а плохих – четное число, причем поровну – белых и черных. Далее у Пети две возможности:

- сделать из двух плохих башенок разного цвета хорошую m-го типа; в ответ Вася объединит две башенки одного типа в одну – того же типа. Получится выигрышная позиция для Васи.
- объединить плохую башенку некоторого цвета и хорошую башенку m-го типа в плохую башенку того же цвета; в ответ Вася, используя плохую башенку другого цвета (а она есть!) и полученную Петей, в хорошую башенку m-го типа. Вновь получится выигрышная позиция для Васи.

Таким образом, в обоих случаях после ходов Пети и Вася уйдут две плохие башенки разных цветов, а хороших будет две разного типа. За конечное число ходов все плохие башенки закончатся, и останутся две хорошие разных типов – у Пети больше нет ходов – он проиграл!

10 – 11 класс **<u>Предварительные решения</u>**

<u>заданий 10-11 класса 45-го Тур Гор (*осень базовый тур от* **15 окт 2023 г.**)</u>

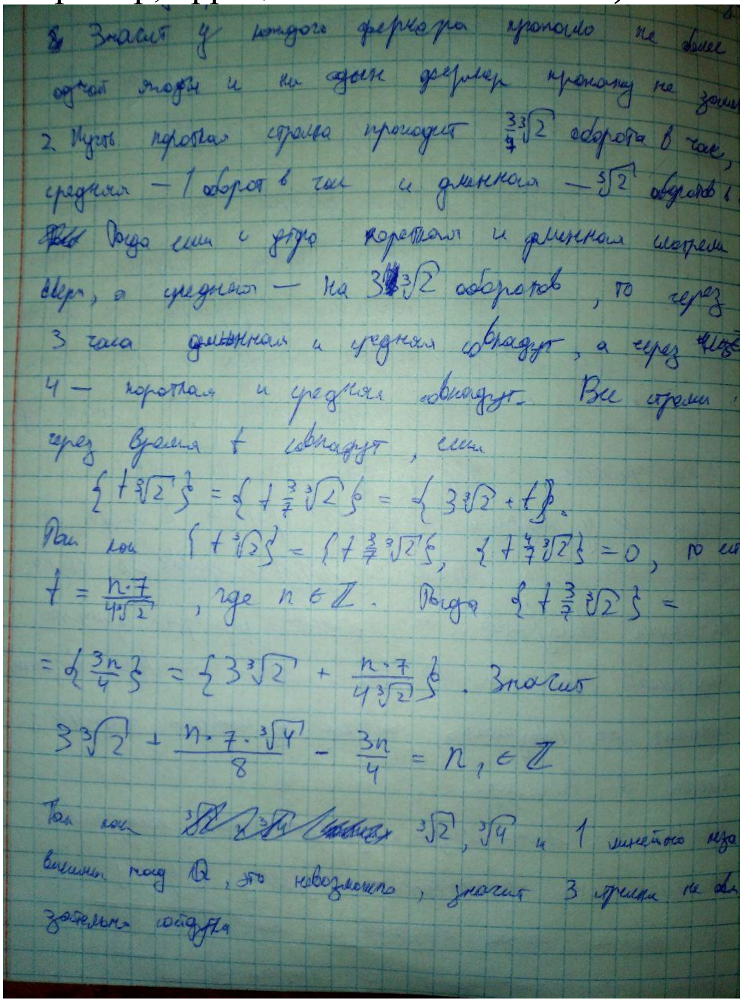
1. Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(-x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов $a_n, \ldots, a_1, a_0$ (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон??

   Ответ: нет, не ошибается: $a_0 = 0$.

   Решение. При сложении $P(x) + P(-x)$ останутся только четные степени x, т.е. суммарный многочлен – четная функция, поэтому с каждым действительным корнем он имеет корень противоположный по знаку. Единственное исключение корень, равный 0 (нулю). Но именно он обеспечит нечетное число корней (45). Подставляя 0 в сумму $P(x) + P(-x)$, получим ответ.

2. На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки??

Ответ: **нет, необязательно.** **Решение.** см. фото (есть и другие решения, использующие, например, иррациональность числа √2).


8. Значит у каждого фермера пропало не более одной ягоды и ни один фермер пропажу не заметил

2. Пусть короткая стрелка проходит $\frac{3}{7}\sqrt[3]{2}$ оборота в час, средняя — 1 оборот в час и длинная — $\sqrt[3]{2}$ оборотов в час. Тогда если с утра короткая и длинная стрелки вверх, а средняя — на $3\sqrt[3]{2}$ оборотов, то через 3 часа длинная и средняя совпадут, а через ещё 4 — короткая и средняя совпадут. Все стрелки через время t совпадут, если

$$\{t\sqrt[3]{2}\} = \{t\tfrac{3}{7}\sqrt[3]{2}\} = \{3\sqrt[3]{2} + t\}.$$

Так как $\{t\sqrt[3]{2}\} = \{t\frac{3}{7}\sqrt[3]{2}\}$, $\{t\frac{4}{7}\sqrt[3]{2}\} = 0$, то $t = \frac{n\cdot 7}{4\sqrt[3]{2}}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\{t\frac{3}{7}\sqrt[3]{2}\} =$

$= \{\frac{3n}{4}\} = \{3\sqrt[3]{2} + \frac{n\cdot 7}{4\sqrt[3]{2}}\}$. Значит

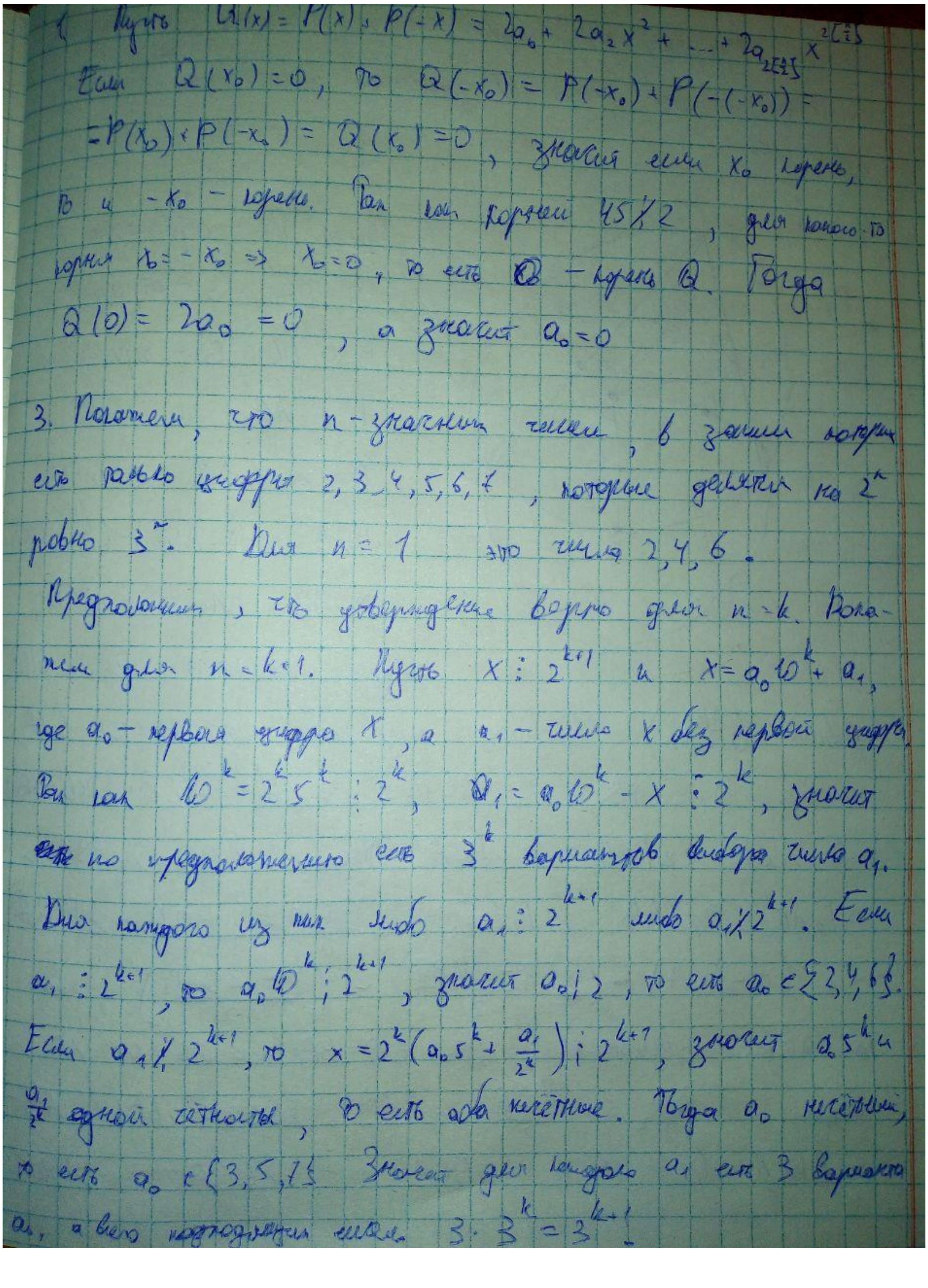
$$3\sqrt[3]{2} + \frac{n\cdot 7\cdot\sqrt[3]{4}}{8} - \frac{3n}{4} = n_1 \in \mathbb{Z}$$

Так как $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ и 1 линейно независимы над $\mathbb{Q}$, это невозможно, значит 3 стрелки не обязательно совпадут.

3. Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?

Ответ. 3^{100}.

Решение. см. фото (*на этом же фото видно решение одного из школьников задачи № 1, по сути совпадающее с решением жюри*):



1. Пусть $Q(x) = P(x) + P(-x) = 2a_0 + 2a_2x^2 + \dots + 2a_{2[\frac{n}{2}]}x^{2[\frac{n}{2}]}$

Если $Q(x_0) = 0$, то $Q(-x_0) = P(-x_0) + P(-(-x_0)) = P(x_0) + P(-x_0) = Q(x_0) = 0$, значит если x_0 корень, то и $-x_0$ — корень. Так как корней $45 \not\vdots 2$, для какого-то корня $x_0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0$, то есть 0 — корень Q. Тогда $Q(0) = 2a_0 = 0$, а значит $a_0 = 0$

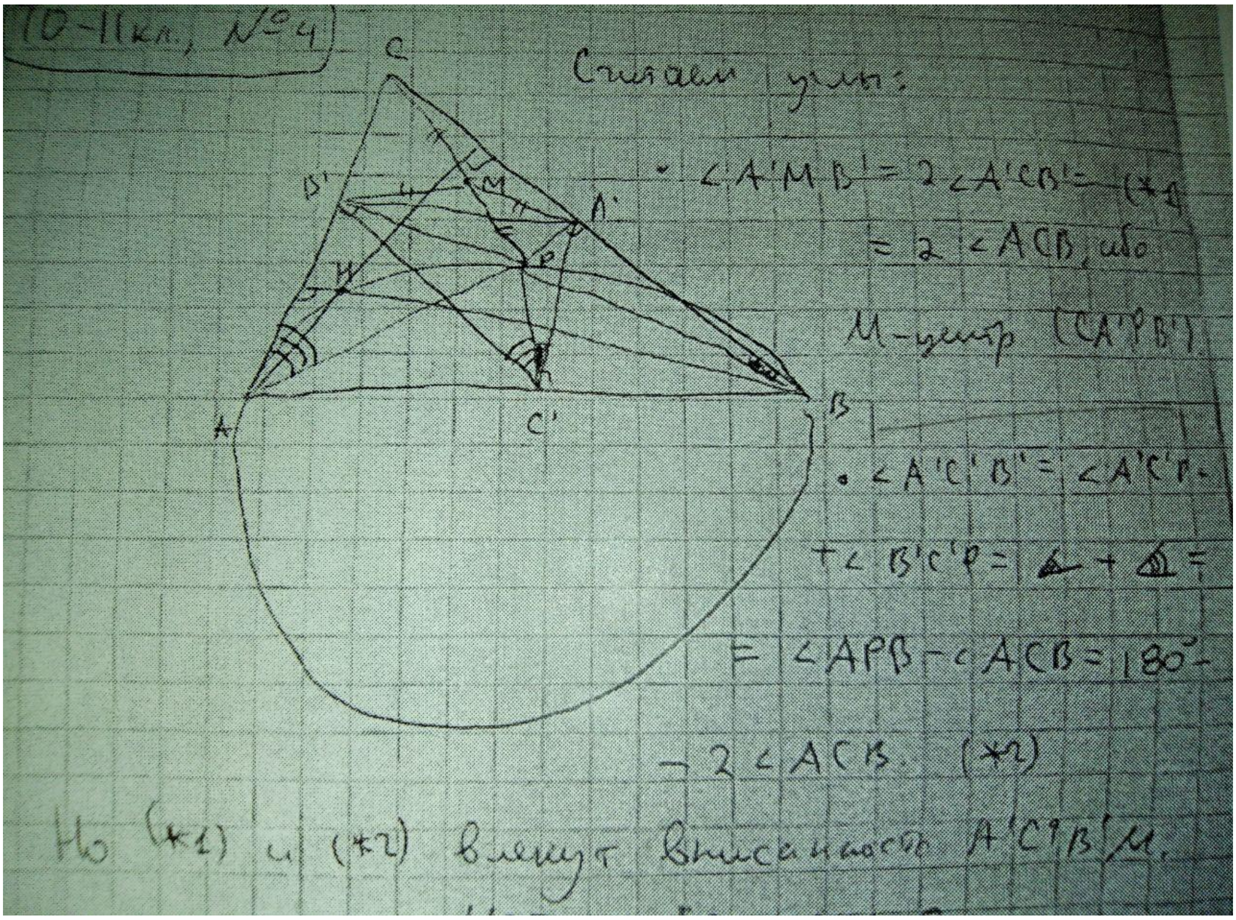
3. Докажем, что n-значных чисел, в записи которых есть только цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7, которые делятся на 2^n ровно 3^n. Для $n = 1$ это числа 2, 4, 6.

Предположим, что утверждение верно для $n = k$. Докажем для $n = k+1$. Пусть $x \vdots 2^{k+1}$ и $x = a_0 10^k + a_1$, где a_0 — первая цифра x, а a_1 — число x без первой цифры. Так как $10^k = 2^k 5^k \vdots 2^k$, $a_1 = a_0 10^k - x \vdots 2^k$, значит по предположению есть 3^k вариантов выбора числа a_1. Для каждого из них либо $a_1 \vdots 2^{k+1}$, либо $a_1 \not\vdots 2^{k+1}$. Если $a_1 \vdots 2^{k+1}$, то $a_0 10^k \vdots 2^{k+1}$, значит $a_0 \vdots 2$, то есть $a_0 \in \{2, 4, 6\}$. Если $a_1 \not\vdots 2^{k+1}$, то $x = 2^k(a_0 5^k + \frac{a_1}{2^k}) \vdots 2^{k+1}$, значит $a_0 5^k$ и $\frac{a_1}{2^k}$ одной чётности, то есть оба нечётные. Тогда a_0 нечётный, то есть $a_0 \in \{3, 5, 7\}$. Значит для каждого a_1 есть 3 варианта a_0, а всего подходящих чисел $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$!

Отсюда следует, что утверждение верно при всех k, т.е. и при k = 100. Доказательство завершено.

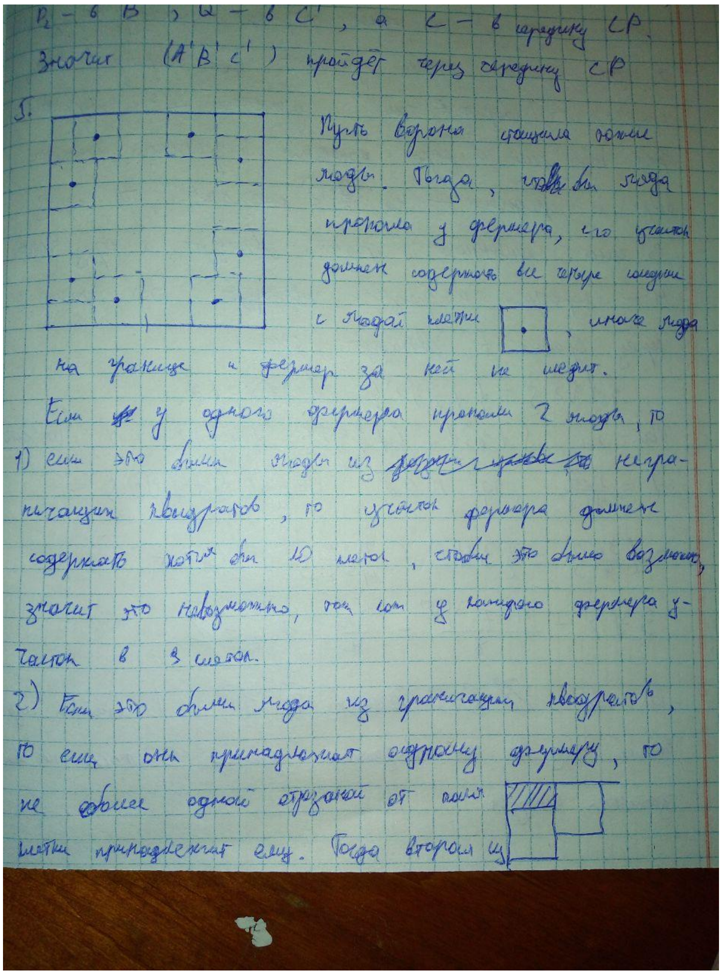
4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P — произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' — проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника A'B'C' проходит через середину отрезка CP.

Решение. Ниже на фото изложена основная идея решения задачи (она в целом понятна, хоть и тяжело описана). Более подробно пришлем позднее



5. У трех фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Ответ и решение. **Да.** (См. еще для сравнения решения похожей задачи из младших классов) Важно понять, во-первых, что значит поле, «сплошь заросшее ягодами», а во-вторых, что линии сетки могут быть границами участков, и тогда фермеры не следят за ними, но могут проходить внутри, тогда – следят. Хоть мы и не знаем границ, но можем заметить, что узлы сетки (т.е. точки пересечения линий сетки) лежат внутри участка одного фермера, если квадрат 2×2 с таким узлом внутри целиком принадлежит одному фермеру.



На фото представлен один из вариантов, как ворона может утащить 8 ягод (см. фото). В дополнение комментарий к фото: При таком выборе ягод ни один фермер не может заметить пропажу двух ягод, ибо тогда его поле либо должно содержать два «не связанных между собой» квадрата 2×2 ПЛЮС еще две клетки, чтобы получить многоугольник, а это уже 10 клеток, либо две заштрихованные клетки в углу последнего рисунка, что тоже невозможно.