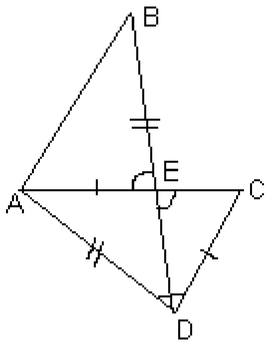
СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ <u>**Осенний тур**</u>

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ Сложного тура - 6-7 класса

Баллы ***Задачи и решения***

4 1. Даны точки A, B, C и D так, что отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Отрезок AE на 1 см короче, чем отрезок AB, $AE = DC$, $AD = BE$, $\angle ADC = \angle DEC$. Найдите длину EC.



Ответ: 1 см.

<u>Решение</u>. Так как $AD = BE$; $CD = AE$; $\angle ADC = \angle DEC = \angle BEA$ (вертикальные углы), то $\Delta ADC = \Delta BEA$ (см. рис. 4). Из равенства этих треугольников следует, что $AC = AB$, тогда ЕС $= AC - AE = AB - AE = 1$ см (по условию).

2 2. А) В каждую клетку доски 4×4 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую — число
3 6?

Б) Решите такую же задачу для доски 8×8.

Ответ: а) да, б) да.

Решение (Сразу для пункта б)). Раскрасим доску в шахматном порядке; поставим во все черные клетки единицы, кроме двух противоволожных угловых черных клеток, в которые тпоставим числа 6 (см. рис). Тогда в белые клетки, в которые из углвых клеток можно попасть ходом коня поставим 2 или 3, а в остальные можем ставить любые простые числа, в частности, например, в угловые белые клетки поставим числа 5. Тогда условия задачи выполнятся, при этом среди чисел есть и 5, и 6. Аналогично для пункта а). Есть и другие варианты расстановки чисел для решения этой задачи.

5	1		1		1		**6**
1		1		1	**2**	1	
	1		1		1	**3**	1
1		1		1		1	
	1		1		1		1
1	**2**	1		1		1	
	1	**3**	1		1		1
6		1		1		1	**5**

5 3. В клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 ладей, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить ладей противоположного цвета (ладьи не прыгают друг через друга). Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске осталась одна ладья?

Ответ: 198.

Решение. Число ходов 198 потребуется в том случае, если все ладьи стоят в разных вертикалях и горизонатлях доски. Тогда для того чтобы какая-то ладья съела некоторую другую потребуется два хода (сначала попасть на соответствующую вертикаль (или горизонталь), а затем уже съесть).

Алгоритм решения может быть следующим: сначала некоторая белая ладья съедает все черные, кроме одной (с учетом замечания в первом абзаце). Затем оставшаяся черная ладья съедает все оставшиеся белые. При этом на каждое «съедание» потребуется два хода.

Примечание. Если некоторые ладьи окажутся в одной вертикали или горизонтали, то ходов потребуется даже меньше.

7 4. Трудолюбивый Фома выписал все трехзначные числа, в записи которых нет нулей. Для каждого такого числа неутомимый Ерёма записал сумму двух его цифр: наименьшей и наибольшей (если в некотором числе эти цифры совпадают, то он суммировал обе цифры). Найдите сумму чисел, записанных Ерёмой.

Ответ: 7290.

Решение. Поскольку каждая цифра от 1 до 9 может стоять на любом из трех мест, то общее количество чисел, записанных Фомоей, равно $9^3 = 729$.

Разобьем эти числа на пары: 111 – 999, 112 – 998 и так далее, таких пар будет $(729 - 1) : 2 = 364$ (число 555 останется без пары).

Пусть в первом числе некоторой пары наименьшая цифра равна a, тогда во втором числе наибольшая цифра равна $(10 - a)$. Аналогично, если в первом числе наибольшая цифра равна b, то наименьшая цифра во втором числе равна $(10 - b)$. Тогда в каждой паре сумма двух наименьших и двух наибольших цифр равна 20. Общая сумма таких цифр будет равна $20 \cdot 364 = 7280$. Добавив к этой сумме 10 (сумма наибольшей и наименьшей цифры числа 555), получим 7290.

9 5. Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. Петя записал в карточку два натуральных числа так, чтобы она была правильной, а Вася утверждает, что за 4 хода может получить из Петиной карточки любую другую правильную карточку. Прав ли Вася? (Свой ответ объясните: если считаете, что Вася прав, то укажите, как он должен действовать, если нет, то докажите это.)

Ответ: Вася прав.

Решение. Ключевой для решения является возможность (идея!) получения за 2 хода из любой карточки, задуманной Петей (пусть этот карточка (P, Q)), карточки вида $(k, k+1)$, $k \in \boldsymbol{N}$, и, наоборот. Покажем как.

Пусть $Q - P = m$, т.е. Петину каточку можно записать как $(P, P + m)$. Воспользуемся промежуточной правильной карточкой вида $(km, km+m)$. Из карточки $(P, Q) = (P, P + m)$ можно получить карточку $(km, km+m)$, прибавив в обоим числам первой карточки число $km - P$. (Заметим, что все числа в указанных карточкам по построению являются натуральными, хотя разность $km - P$ может принимать и отрицательные значения.)

Затем разделив оба числа второй (промежуточной) карточки на m, получим $(k, k+1)$.

И еще заметим, что все ходы в этих действиях обратимы. Но тогда понятно, что из карточки $(k, k+1)$ поступая аналогичным образом можно получитьза 2 хода любую другую правильную карточку. Итого понадобится не более 4 ходов!

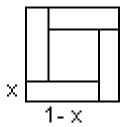
11 6. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники периметра 2. Сколько прямоугольников могло получиться? (Укажите все возможные значения и обоснуйте.)

Ответ: могло получиться любое число прмоугольников, большее 3.

Решение. 1) Покажем, что невозможно разрезать данный квадрат меньше, чем на четыре прямоугольника с периметром 2. Действительно, каждый из четырех углов квадрата является одновременно и углом одного из прямоугольников. Если нам удалось разрезать квадрат на 1, 2 или 3 прямоугольника с периметром 2, то хотя бы один из них занимает 2 угла. То есть, у такого прямоугольника две стороны равны стороне квадрата, следовательно, его периметр больше двух.

2) Разрезание квадрата со стороной 1 на четыре квадрата со стороной 0,5.

3) Разрежем квадрат на 4 одинаковых прямоугольника и квадрат так, как это показано на рис. Пусть одна из сторон прямоугольника равна x, тогда другая сторона имеет длину 1 – x, поэтому периметр каждого из этих прямоугольников равен 2 независимо от значения x. Сторона «центрального» квадрата равна 1 – 2x, то есть, его периметр равен 4 – 8x. Следовательно, это разбиение удовлетворяет условию задачи при x = 0,25 .



4) Для того, чтобы разрезать данный квадрат на 6 прямоугольников периметра 2 достаточно разбить «центральный» квадрат на два равных прямоугольника. В этом случае периметр каждого из них будет равен $2(1-2x)+2\cdot\frac{1-2x}{2}=3(1-2x)$, то есть, x =1/6.

Аналогично, изменяя значение x, можно разбивать центральный квадрат на любое количество равных прямоугольников, увеличивая тем самым количество прямоугольников в разрезании данного квадрата.

Таким образом, квадрат можно разбить на любое число прямоугольников большее 3.

7. В выражении СЕМЬ × ВОКРУГ – КРУГ × ВОСЕМЬ одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные – разными.

А) Докажите, что значение выражения делится на 10000.

Б) Может ли значение выражения делиться на 100000?

В) Может ли значение выражения делиться на 1000000?

Ответ и решение:

Заметим, что в выражении присутствуют 10 различных букв, то есть использованы все 10 цифр, причем буквы С, В, К не могут быть 0 (с них начинаются числа).

Произведем с выражением преобразования:

СЕМЬ • ВОКРУГ - КРУГ • ВОСЕМЬ= СЕМЬ • (ВО•10000+КРУГ) - КРУГ • (ВО•10000+СЕМЬ) = СЕМЬ • ВО•10000 + СЕМЬ •КРУГ - КРУГ • ВО•10000 - КРУГ • СЕМЬ = ВО•10000•(СЕМЬ-КРУГ)

А) Из преобразования выше следует делимость на 10000

Б) Да, может. Например, при О=0 выражение кратно 100000.

В) Да, может. Например, при О=4, а МЬ-УГ=25.