45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

Решения задач осеннего тура

Сложный вариант

Младшие классы

1. [4] В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую – число 6?

Егор Бакаев

Ответ. Могло. **Решение**. *Пример 1*. Раскрасив доску в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, сначала во все чёрные клетки впишем единицы, а во все белые – двойки. Затем заменим угловую единицу на 6, а соседнюю с ней двойку – на 5 (см. рисунок справа).

1	2	1
2	1	2
6	5	1

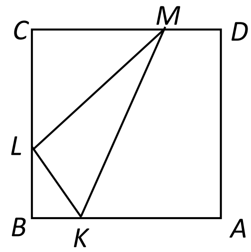
Пример 2 см. на рисунке ниже.

6	5	10	2	10	2	10	2
5	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10

2. [6] В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $^1/_6$.

Александр Юран

Решение 1. Возьмём точку внутри треугольника и спроектируем из неё вершины треугольника на контур квадрата *ABCD* и соединим проекции друг с другом. Получится новый треугольник, содержащий исходный. Если при этом две вершины нового треугольника окажутся на одной стороне квадрата, увеличим эту сторону треугольника так, чтобы она совпала со стороной квадрата (возможно, эту операцию придется повторить несколько раз). Достаточно доказать утверждение для последнего треугольника. Заметим, что *внутри* одной стороны квадрата (пусть AD) вершин треугольника нет. Поэтому можно считать, что вершины K, L, M треугольника лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD (см. рисунок; возможно некоторые из них совпадают с вершинами квадрата).



Один из отрезков BL, CL (пусть CL) не меньше $^1/_2$. Если при этом $CM \geq {}^2/_3$, то $S_{LCM} \geq {}^1/_6$. Если же $CM < {}^2/_3$, то $S_{ADM} \geq {}^1/_6$.

Решение 2. Отрежем от квадрата нижнюю треть отрезком YZ и соединим концы отрезка с серединой X стороны CD (рис. 1). Площади треугольников CXY и DXZ равны по 1/6, поэтому внутри каждого из них есть вершина дыры (иначе эти треугольники можно отрезать). Площади треугольников BYA и BZA также равны по 1/6, поэтому оставшаяся вершина дыры лежит в каждом из них, то есть, лежит внутри треугольника BTA. Построив на каждой стороне квадрата такой треугольник (рис. 2), аналогично докажем, что внутри каждого из них лежит вершина дыры, что невозможно, так как треугольников четыре, а вершин три.

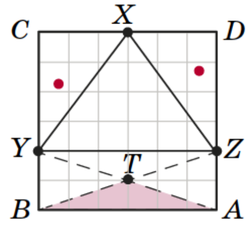


Рис. 1

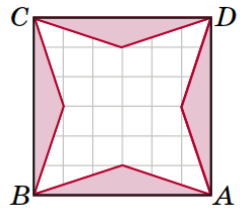


Рис. 2

3. [7] Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

Алексей Глебов

Ответ. За 3 хода. **Решение**. Будем изображать карточку в виде пары (a, b), где $a < b$. Пусть надо из (a, b) получить (c, d). Умножим первую карточку на разность $d - c$ чисел на второй карточке, получим карточку $(a(d - c), b(d - c))$. Вторым ходом получим из неё карточку $(c(b - a), d(b - a))$. Это можно сделать с помощью сложения, так как разность между нижним и верх-ним числами на каждой из этих карточек равна $(b - a)(d - c)$. Третьим ходом делим на разность $b - a$.

Докажем, что из карточки (1, 3) нельзя получить карточку (1, 4) меньше, чем за три хода. Для нашей карточки первый ход – прибавление натурального числа или умножение (так как на ней есть 1).

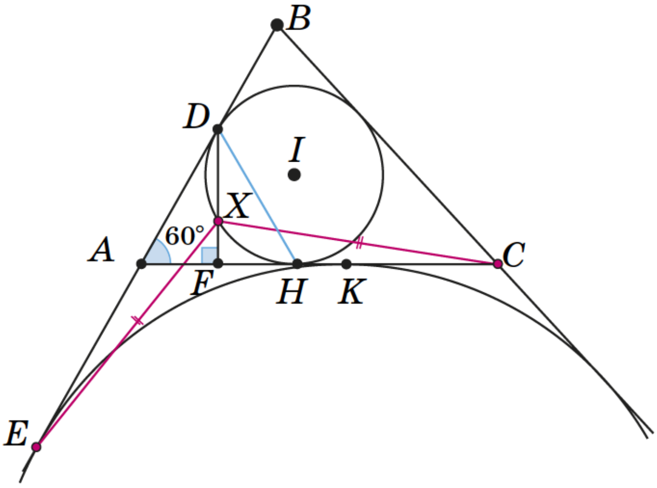
В первом случае разность чисел на карточке останется равной 2, и за одно деление или умножение получить разность 3 нельзя (разность умножится или разделится на целое число); сложение разность вообще не изменит.

Во втором случае, чтобы изменить отношение чисел на карточке с 3 на 4, придётся вторым ходом использовать вычитание, тогда разность уже должна была равняться 3, но она кратна 2.

4. [7] Дан треугольник ABC с углом A, равным 60°. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

Азамат Марданов

Решение. Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H, вневписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K, перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X. Поскольку $AD = AH$, $\angle A = 60°$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH = 2\angle XDH = 60° = \angle AIH$, точка X лежит на прямой AI, то есть является центром треугольника ADH.



По свойствам касательных вписанной и вневписанной окружностям, $AE = AK = CH$. Кроме того, $AX = HX$, $\angle EAX = 150° = \angle CHX$. Следовательно, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE = XC$.

5. [9] У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая – весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов – одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

Андрей Аржанцев

Решение. Будем всегда класть на чаши весов поровну гирь. Заметим, что тогда заведомо нефальшива гиря, оказавшаяся на лёгкой чаше, а в случае равенства – на любой из чаш. Обозначим весы X и Y. Первым взвешиванием положим на чаши весов X по 4 гири.

1) Весы в равновесии. Тогда фальшива одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим по 2 подозрительные гири на чаши весов X. При равновесии фальшива невзвешенная гиря A.

В противном случае фальшива либо гиря A (если весы X неправильные), либо одна из гирь B, C на «тяжёлой» чаше. Третьим взвешиванием сравним B с C на весах Y. При равновесии фальшива гиря A. В противном случае фальшива более тяжелая гиря (если бы фальшива была A, весы Y показали бы равновесие).

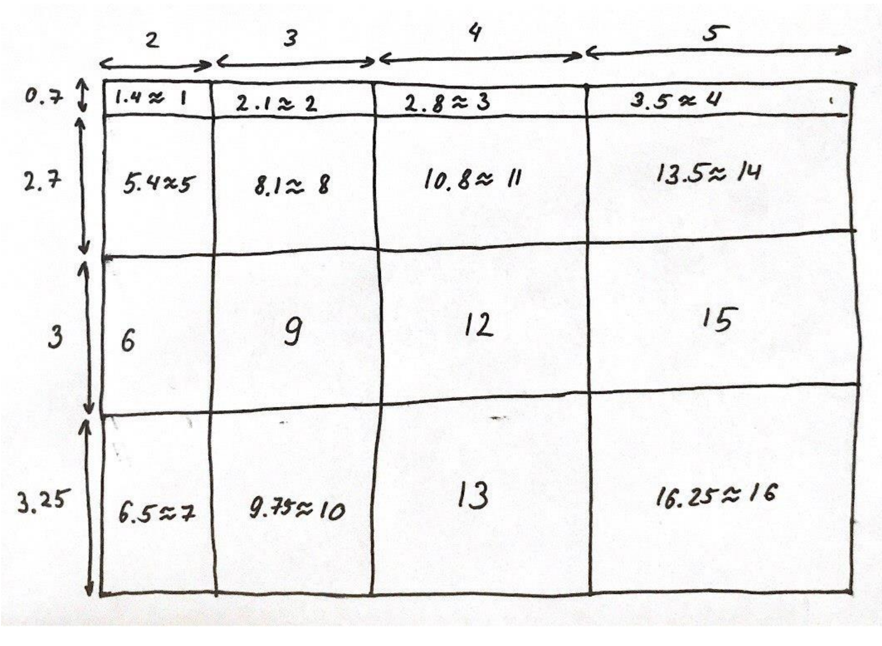
2) Одна из чаш опустилась. Тогда фальшива либо одна из 4 гирь на «тяжёлой» чаше, либо одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим на чаши весов Y по 2 «тяжёлые» гири и по одной из невзвешенных – A и B. При равновесии фальшива одна из 3 ещё не взвешенных гирь, причём весы Y правильные (раз они показали равенство, все гири на них настоящие – в том числе, четыре гири, «тяжёлые» по мнению весов X, то есть весы X соврали). С их помощью найдём за одно взвешивание одну фальшивую гирю из 3 подозрительных.

Если одна из чаш (пусть с гирей A) опустилась, то фальшива одна из гирь на этой чаше (если бы фальшивая гиря была среди 3 невзвешенных, то как весы X, так и весы Y были бы неправильны, что не так). Более того, A фальшива только если весы Y правильные. Третьим взвешиванием сравним на весах Y две отличные от A гири с её чаши. При равновесии фальшива A, в противном случае – более тяжёлая гиря.

6. [10] Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n - 1$ горизонтальных разрезов и $n - 1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

Георгий Караваев

Ответ. Для $n = 4$. **Решение**. Пример пирога представлен в виде таблицы, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток:



Докажем, что $n \leq 4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов – слева направо. Пусть числа в угловых клетках равны $a < b < c < d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причём $ad = bc$. Пусть b – правое верхнее. Округлённые числа будем обозначать штрихами. Тогда $a' = 1$, $d' = n^2$, $b' \geq n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c' \geq 2n - 1$ (оно не меньше всех чисел первого столбца и верхней строки). Значит, $a < 1{,}5$, $d < n^2 + 0{,}5$, $b \geq n - 0{,}5$, $c \geq 2n - 1{,}5$. Поэтому $1{,}5(n^2 + 0{,}5) > ad = bc > (n - 0{,}5)(2n - 1{,}5)$, откуда $1{,}5n^2 + 0{,}75 > 2n^2 - 2{,}5n + 0{,}75$, то есть $2{,}5n > 0{,}5n^2$, откуда $n < 5$.

7. [12] На белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

Александр Грибалко

7. Ответ: 197 ходов.

Алгоритм. Все ходы будем делать так, чтобы на доске оставались слоны обоих цветов, пока слонов хотя бы два.

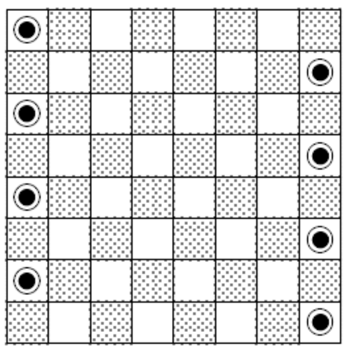
Если есть возможность сделать *экономичное* взятие (слон за один ход бьёт слона другого цвета, стоящего с ним на одной диагонали), делаем его.

В противном случае сделаем *неэкономичное* взятие (за два хода). Выберем двух слонов разного цвета и рассмотрим путь, по которому первый слон мог бы пройти ко второму за два хода (такой путь всегда есть). Если на этом пути есть ещё слоны, найдём среди них двух ближайших друг к другу слонов разного цвета, и пусть один из них собьёт другого за два хода.

Изначально все слоны стоят на 99 белых диагоналях, параллельных главной белой диагонали. Тогда на одной из них стоит не меньше двух слонов. Назовём двух из этих слонов *особыми*. Если особые слоны разного цвета, экономичное взятие возможно уже на первом ходу вдоль этой диагонали; сделаем его.

Пусть эти особые слоны белые. Тогда при взятиях будем бить чёрными слонами белых. После того как будет взят первый особый слон, это ограничение снимается. Заметим, что сразу после этого возможно экономичное взятие.

Поскольку всего взятий 99 и хотя бы одно из них экономичное, потребуется не больше $2 \cdot 99 - 1 = 197$ ходов.



Оценка. Расставим произвольным образом по 50 слонов на нижней и верхней строке доски. При этом на всех 199 белых диагоналях обоих направлений будут стоять слоны (угловые белые клетки доски мы считаем «одноклеточными» диагоналями). За ход число диагоналей, на которых есть слон, может уменьшиться не более, чем на 1 (поскольку «исчезнуть» может только та диагональ, с которой уходит слон для взятия другого слона). Когда останется один слон, занятых диагоналей будет 2. Итого, понадобится хотя бы $199 - 2 = 197$ ходов.

Старшие классы

1. [4] Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, ..., 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

Алексей Глебов

Ответ. Поровну. **Решение**. Заметим, что корни многочленов из условия могут быть только отрицательными. К каждому многочлену P из условия есть парный P^*, коэффициенты которого записаны в обратном порядке. Заметим, что корни P^* обратны корням P. Следовательно, исходные числа на доске разбиваются на пары взаимно обратных отрицательных чисел. После прибавления единицы числа из интервала (–1, 0) станут положительными, а числа, меньшие –1, останутся отрицательными.

2. [5] Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

Алексей Глебов

Ответ. Для $N = 2^{10} - 1 = 1023$. **Решение**. Будем называть числа, обладающее свойством из условия, *хорошими*. Докажем по индукции, что в хорошем числе, содержащем k различных цифр ($1 \le k \le 10$), не более $2^k - 1$ знаков.

База ($k = 1$) очевидна – используется лишь одна цифра, и она не может повторяться.

Шаг индукции. Пусть $1 \le k \le 9$ и X – хорошее число, содержащее k+1 различных цифр. По условию одна из цифр a встречается в нём ровно один раз. Заметим, что слева и справа от этой цифры записаны хорошие числа, в каждом из них используется не более k различных цифр, поэтому в каждом из них (по индукции) не более $2^k - 1$ знаков, а суммарно в X тогда не более $(2^k - 1) + (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$ знаков, что и требовалось.

Пример хорошего числа, содержащего k различных цифр ($1 \le k \le 10$), в записи которого ровно $2^k - 1$ знаков, также построим по индукции.

База ($k = 1$): подходит число 0.

Шаг индукции. Пусть $1 \le k \le 9$ и X – хорошее число, в котором k различных цифр и $2^k - 1$ знаков. Возьмём цифру, которая не встречается в этом числе (назовём её a), и припишем к ней слева и справа число N. В полученном числе $2^{k+1} - 1$ знаков, и оно хорошее: ведь любая его часть из несколько подряд идущих цифр либо включает единственную в числе цифру a, либо является частью хорошего числа N.

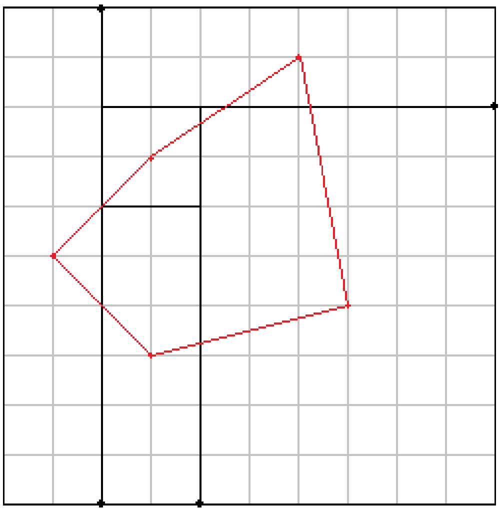
3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

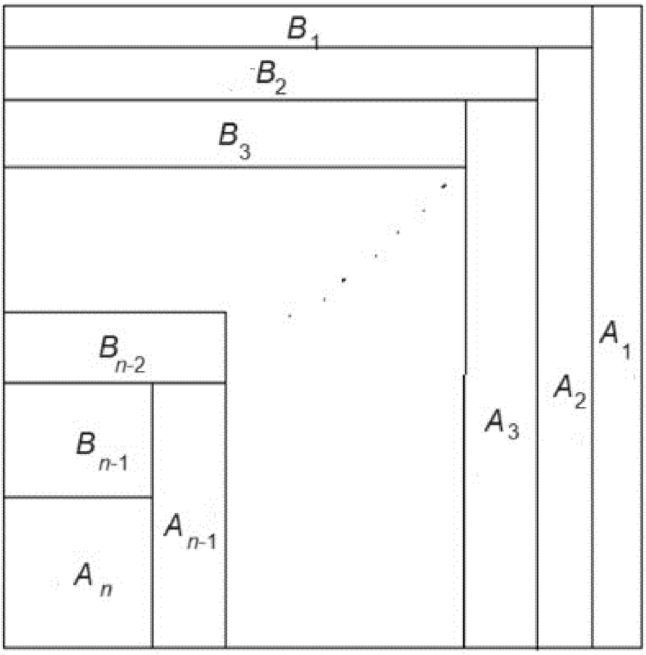
Александр Шаповалов

а) [3] Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

б) [6] Может ли количество прямоугольников равняться 23?

а) Ответ: не обязательно. **Решение**. См. рисунок слева.





б) Ответ. Может.

Решение. Приведём пример для произвольного нечётного $m = 2n - 1$, $n > 1$. Разобьём квадрат на n «вертикальных» прямоугольников A_1, …, A_n и $n - 1$ «горизонтальных» прямоугольников B_1, …, B_{n-1}, расположенных так, как показано на рисунке справа. Центры прямоугольников будем обозначать теми же буквами, что и сами прямоугольники. Пусть ширина (горизонтальная сторона) прямоугольника A_i равна a_i, высота (вертикальная сторона) прямоугольника B_i равна b_i. Тогда тангенс угла наклона прямой $A_{i+1}A_i$ к горизонтальной оси равен $\frac{b_i}{a_{i+1}+a_i}$, а тангенс угла наклона прямой $B_{i+1}B_i$ к вертикальной оси равен $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}+b_i}$. Для выпуклости достаточно подобрать значения a_i и b_i так, чтобы обе последовательности тангенсов возрастали с уменьшением i и сумма ширин $a_n + \dots + a_1$ была бы больше суммы высот $b_{n-1} + \dots + b_1$ (тогда мы сможем подобрать высоту прямоугольника A_n так, чтобы получился квадрат, а высоты остальных прямоугольников A_i и ширины прямоугольников B_i подберутся автоматически). Сделаем, например $a_i = (2i - 1)!$ и $b_i = (2i)!$. Тогда $\mathrm{ctg}(A_{i+1}A_i) = 2i + 1 + \frac{1}{2i}$, $\mathrm{ctg}(B_{i+1}B_i) = 2i + 2 + \frac{1}{2i+1}$. Нетрудно проверить, что обе последовательности котангенсов убывают с уменьшением i, а значит, последовательности тангенсов возрастают.

4. [9] Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $^{S}/_{8}$.

Михаил Малкин

Решение. Пусть K, L, M и N – точки деления, лежащие на сторонах AB, BC, CD и DA, причём $AK = aAB$, $BL = bBC$, $CM = cCD$, $DN = dDA$. Тогда

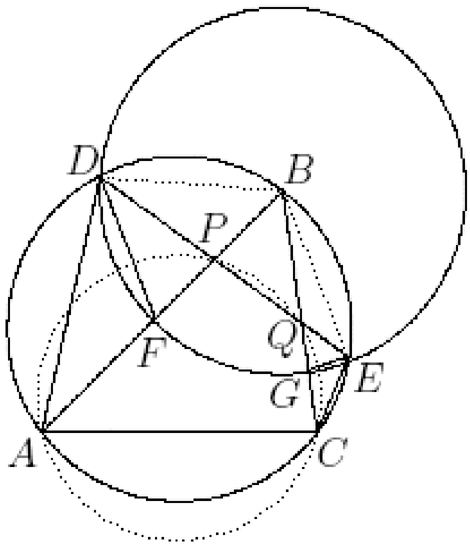
$S_{KBL}S_{LCM}S_{MDN}S_{NAB} = (1-a)bS_{ABC}(1-b)cS_{BCD}(1-c)dS_{CDA}(1-d)aS_{DAB} \le$

$$\le \left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2\left(\frac{c+1-c}{2}\right)^2\left(\frac{d+1-d}{2}\right)^2\left(\frac{S_{ABC}+S_{CDA}}{2}\right)^2\left(\frac{S_{BCD}+S_{DAB}}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{S}{2}\right)^4.$$

Следовательно, одно из чисел S_{KBL}, S_{LCM}, S_{MDN}, S_{NAB} не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{S}{2}=\frac{S}{8}$.

5. [10] Хорда *DE* описанной около треугольника *ABC* окружности пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *P* и *Q* соответственно, точка *P* лежит между *D* и *Q*. В треугольниках *ADP* и *QEC* провели биссектрисы *DF* и *EG*. Оказалось, что точки *D, F, G, E* лежат на одной окружности. Докажите, что точки *A, P, Q, C* лежат на одной окружности.

Азамат Марданов



Решение. Заметим сначала, что точки *G* и *E* лежат по другую сторону от прямой *AB*, нежели точка *D*, поэтому отрезки *DF* и *GE* не пересекаются. Отрезки же *DE* и *FG* не пересекаются по построению. Тогда *D*, *E*, *G*, *F* – последовательные точки на окружности, откуда четырёхугольник *DFGE* выпуклый.

Далее мы докажем лемму:

B – середина дуги *DE*, не содержащей точек *A* и *C*.

Этого достаточно для решения задачи, поскольку тогда равны углы *EAB* и *DAB*, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами *DE* и *AB*, мы получаем равенство:

$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180° - \angle ADB = \angle ACB,$

откуда четырёхугольник *APQC* вписанный.

Доказать лемму можно по-разному.

1-й способ. Предположим противное: серединой дуги *DBE* является точка *B’*, отличная от *B*. Не умаляя общности, *B’* лежит на дуге *BE*, не содержащей точки *D*. Тогда хорда *AB’* пересекает хорду *DE* в точке *P’*, такой что *P* лежит между *D* и *P’*. Далее *DF* – биссектриса угла *P’DA*, пусть *F’* – точка её пересечения с *P’A*, тогда *F* лежит между *D* и *F’*.

Аналогично, если *Q’* – точка пересечения *B’C* с *DE*, а *G’* – точка пересечения *EG* с *B’C*, получаем, что *G’* лежит между *G* и *E*. Имеем тогда:

$$\angle F'DB' = \angle F'DE + \angle EDB' = 1/2\cdot\angle ADE + \angle EDB' = 1/2\cdot\angle ADE + \angle DEB',$$

$\angle DF'B' = 180° - \angle F'DB' - \angle DB'F' = (\angle DB'A + \angle ADE + \angle DEB' + \angle EDB') -$

$- (1/2\cdot\angle ADE + \angle EDB') - \angle DB'F' = 1/2\cdot\angle ADE + \angle DEB' = \angle F'DB',$

то есть, треугольник *F’DB’* равнобедренный и *DB’=F’B’*. Аналогично получаем *EB’=G’B’*, и из определения *B’* выполнено *DB’=B’E*, то есть, *D*, *F’*, *G’*, *E* лежат на окружности с центром B'. Так как четырёхугольники $DFGE$ и $DF'G'E'$ оба вписанные, то $F'G'$ и FG параллельны (так как они обе антипараллельны DE относительно DF и EG). Однако, раз $DFGE$ выпуклый, то прямая, параллельная FG и проходящая через точку G', лежащую на стороне GE, пересечёт луч FD, но она пересекает прямую FD в точке F', лежащей на продолжении FD за F – противоречие.

2-й способ. Пусть B' – центр описанной окружности ω четырёхугольника $DFGE$. Так как $\angle FDE$ острый, то $1/2\angle FB'E = \angle FDE = 1/2\cdot\angle ADE = 1/2\cdot\angle ABE = 1/2\cdot\angle FBE$, то есть $\angle FB'E = \angle FBE$, при этом B и B' лежат одну сторону с D от прямой FE (B' по эту сторону, так как $\angle FDE$ острый). Тогда B' лежит на описанной окружности треугольника BFE, аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BGD. Заметим сразу, что раз $\angle FBE = 2\angle FDE > \angle FDE$, то B лежит внутри ω. Предположим, $B \neq B'$. Тогда при инверсии относительно ω точка B переходит в общую точку образов описанных окружностей треугольников BFE и BGD, то есть в точку пересечения FE и GD, то есть в точку пересечения диагоналей $DFGE$, то есть в некоторую точку внутри ω, но это невозможно, так как B сама внутри ω – противоречие. Значит, $B=B'$, откуда $BD = BE$ и значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

3-е решение: Пусть ω – описанная окружность четырёхугольника $DFGE$, Ω – описанная окружность треугольника ABC. Так как Q – точка внутри ω, то луч QB пересекает ω, пусть в точке Y; $Y \neq B$ (иначе бы различные окружности ω и Ω имели три общие точки). Аналогично, пусть X – точка пересечения луча PB с ω. Тогда, пользуясь равенствами вписанных углов и тем, что EG – биссектриса угла DEC, имеем следующие равенства ориентированных углов: $\angle(BD, DY) = \angle(BD, BC) + \angle(BC, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(YG, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(EG, ED) = -\angle(EG, ED) = -\angle(YG, YD) = -\angle(YB, YD)$, откуда треугольник YDB равнобедренный, то есть $BD=BY$, аналогично получаем $BE=BX$. Из равнобедренности YDB следует, что угол DYB острый, тогда Y лежит на продолжении QB за точку B (иначе бы YBD был смежным с вписанным углом DYQ, который острый, так как равен острому вписанному углу DEG). Тогда далее имеем

$$\angle YDE=\angle YDB+\angle BDE=\angle DYB+\angle BDE=\angle DEG+\angle BDE=1/2\cdot\angle DEC+\angle BDE<1/2\cdot\angle DBE+\angle BDE.$$

Аналогично получаем, что $\angle XED < 1/2\cdot\angle DBE+\angle BED$. Складывая эти неравенства, имеем $\angle XED+\angle YDE<\angle DBE+\angle BED+\angle BDE=180°$. Значит, DY и EX не параллельны, поэтому серединные перпендикуляры к DY и EX имеют единственную общую точку, но и B, и центр ω являются таковыми, значит B – центр ω. Тогда $BD=BE$ и, значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

6. [12] Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора $\{1, ..., 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

Иван Кухарчук

Ответ: обязательно.

Решение. **Лемма**. Пусть k и l – натуральные числа, причём НОК(k, l) < $k + l$. Тогда $k + l$ делится на k или на l.

Доказательство. Пусть d = НОД(k, l). По условию $kl < d(k + l)$, т.е. $(k - d)(l - d) < d^2$. Один из множителей меньше d и делится на d, т.е. равен нулю. А $k + l$ делится на d. □

Условие делимости не изменится, если все числа строки уменьшить на одно и то же целое число. Поэтому можно считать, что верхние числа находятся в пределах от 0 до 2022, а нижние от – 0 до M (причём и 0, и M присутствуют). Ясно, что $M > 2022$. Разность чисел над 0 и M делится на M, поэтому эти числа равны (пусть это число b).

Предположим, есть столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$, где $d \neq 0$. Ясно, что $|d| \le 2022$. Сравнивая этот столбец со столбцами $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix}$, видим, что d делится как на k, так и на $M - k$. Поэтому d делится на НОК(k, $M - k$); по лемме M делится на k или на $M - k$. Как известно, у числа M не более $2\sqrt{M}$ делителей, столько же дополнений этих делителей до M, значит, всего в верхней строке не более $4\sqrt{M}$ чисел, отличных от b. С другой стороны, и k, и $M - k$ не больше 2022, поэтому $M \le 4044$. Итак, в верхней строке не более $4\sqrt{4044} < 300$ чисел, отличных от b. Зафиксируем один столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$ и рассмотрим произвольный столбец вида $\begin{pmatrix} b \\ k+q \end{pmatrix}$. По условию d делится на q. Значит, в первой строке не более $4\sqrt{d} \le 4\sqrt{2022} < 180$ чисел b (q может быть как положительным, так и отрицательным). Но 300 + 180 < 2024. Противоречие.

Замечание. Для малых размеров таблицы утверждение неверно. Пример:

1	1	1	1	7	1	1	1
1	4	5	6	7	8	10	13

7. [14] На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n – по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).

Александр Грибалко

1-е решение. Случай $n = 1$ очевиден.

В случае $n = 2$ положим на чаши по одной монете. В случае равновесия добавим в пару к каждой одну из не взвешенных монет. В противном случае пары образуют две взвешенные, и две невзвешенные монеты.

В случае $n = 3$ у нас есть 6 монет A, B, C, D, E, F. Сначала сравним A и B, потом C и D. Если оба раза весы в равновесии, то нужные пары – (A, C), (B, D) и (E, F). Если оба раза равновесия нет, нужные пары – (A, B), (C, D) и (E, F). Если равновесия не будет один раз, например при первом взвешивании, то нужные пары – (A, B), (C, E) и (D, F).

Пусть $n \geq 4$. Уменьшим мысленно веса всех монет на 9 г: теперь они весят 0 и 1 г. Поскольку мы всегда будем класть на чаши весов поровну монет, на результаты взвешиваний это не повлияет. Общий вес всех монет теперь равен n г.

Разобьём монеты на n пар, а затем приведём алгоритм разбиения пар на сравнимые *цепочки* вида $a = a = \ldots = a > b = b = \ldots = b$ или $c = c = \ldots = c$ и на отдельные пары известного веса.

Алгоритм. Будем сравнивать первую пару с остальными, пока не получим неравные пары. Взвешенные пары образуют цепочку $a = a = \ldots = a > b$ или $a > b = b = \ldots = b$. (буквами обозначены веса пар). Отложим взвешенные пары и, проделав то же с оставшимися, получим вторую цепочку с неравенством, скажем $c = c = \ldots = c > d$. Сравним $a + b$ с $c + d$. Равенство означает $a = c$, $b = d$. Тогда две цепочки объединяются в одну $a = \ldots = a > b = \ldots = b$, и мы продолжаем поиск цепочки среди оставшихся невзвешенными пар. Заметим, что число взвешиваний с парами цепочки на 1 меньше длины цепочки.

Главный случай. Если при сравнении получилось неравенство, скажем, $a + b > c + d$, то $a = 2$, а $d = 0$. Взяв из этих пар по одной монете, создадим пару $p = 1$. Сравнив каждую из невзвешенных пар с p, найдём их веса. Мы провели всего $n - 1$ взвешивание и теперь знаем веса пар вида a, вида d и пар вне цепочек. Тем самым мы знаем общий вес пар видов b и c в цепочках. Их число нам тоже известно: k пар вида b и m пар вида c. Возможны три случая: 1) $b = c = 1$; 2) $b = 1$, $c = 2$; 3) $b = 0$, $c = 1$. Соответственно, их общий вес $k + m$, $k + 2m$ или m. Но $m < k + m < k + 2m$ – из трёх вариантов подойдёт лишь один. А зная веса пар, легко разложить монеты нужным образом.

Цепочка неравенств + цепочка равенств. $a = \ldots = a > b = \ldots = b$, $c = c = \ldots = c$ (это значит, что невзвешенных пар не осталось). Пусть есть k пар a, m пар b и r пар c.

Для весов a, b, c возможны 9 случаев, сведённых в таблицу. Напомним, что общий вес всех монет равен $n = k + m + r$. Поэтому четыре «красных» строки невозможны.

a	**b**	**c**	**Общий вес**	**Следствие**	
2	1	1	$2k + m + r$		
2	1	0	$2k + m$	$k = r$	$a + b > 2c$, $b > c$
2	0	0	$2k$	$k = m + r$	$a > c$
1	0	0	k		
2	0	1	$2k + r$	$k = m$	$a + b = 2c$
2	1	2	$2k + m + 2r$		
2	0	2	$2k + 2r$	$k + r = m$	$b < c$
1	0	2	$k + 2r$	$r = m$	$a + b < 2c$, $a < c$
1	0	1	$k + r$		

В остальных строках это равенство приводится к виду, записанному в пятом столбце. Если выполнено ровно одно из этих равенств, мы нашли веса a, b, c.

Больше двух равенств могут быть выполнены в трёх случаях. Но мы провели только $n – 2$ взвешивания и дополнительное взвешивание поможет их различить.

1) $k = m = r$. Сравнив дополнительно $a + b$ с $c + c$ (заметим, что $r > 1$, поэтому две пары c у нас есть), мы различим три случая в «синих» строках (2-я, 5-я и 8-я).

2) $k = r, k + r = m$. Сравнив дополнительно b с c, мы отличим 2-ю и 7-ю строки.

3) $m = r, k = m + r$. Сравнив дополнительно a с c, мы отличим 3-ю и 8-ю строки.

Одна цепочка неравенств: $a = ... = a > b = ... = b$ возможна только в случае $a = 2, b = 0$.

Одна цепочка равенств: $a = ... = a$ возможна только в случае $a = 1$.

Замечание. Случай $n = 2$ можно отдельно не разбирать: он подходит под общий случай.

2-е решение. Если $n = 1$, то монеты уже образуют нужную пару, достаточно 0 взвешиваний. Поэтому далее можем и будем считать, что $n > 1$.

Пары монет с суммарными весами 20 г, 19 г, 18 г будем называть тяжёлыми, средними, лёгкими соответственно. Далее приведём явный алгоритм.

Разобьём монеты на n пар произвольным образом, далее возьмём одну из этих пар и будем последовательно сравнивать с остальными парами до тех пор, пока не будет получено неравновесие. Если оно так и не будет получено, то все n пар одинаковые, и значит они все средние (так как 20-граммовых и 19-граммовых монет одинаковое количество), то есть уже получено искомое разбиение.

Поэтому далее можем и будем считать, что неравновесие встретится, причём первая пара в этом взвешивании тяжелее (другой случай аналогичен: надо поменять в рассуждении 20 граммовые монеты с 18 граммовыми, тяжёлые пары с лёгкими и т.п.).

Так как 20 граммовых и 18 граммовых монет одинаковое количество, то тяжёлых и лёгких пар тоже одинаковое количество. Если уже сделано $n – 1$ взвешивание, то все пары, кроме одной («последней») одинаковые, причём эта одна легче остальных. Это возможно только при $n = 2$ (иначе пар какого-то типа – одна, какого-то $n – 1 > 1$, а какого-то 0, т.е. тяжёлых и лёгких пар не поровну). В этом случае понятно, что «первая» пара тяжёлая, а «последняя» – лёгкая; беря по монете из этих пар, формируем 2 нужные пары. Тогда далее можем и будем считать что сделано $a + 1 < n – 1$ взвешиваний (получено a равновесий, возможно $a = 0$), в частности $n > a+2 \geq 2$. Обозначим через A, B монеты «первой» пары, а через C, D – монеты последней пары. Сравним пару A, C с парой B, D.

Если будет получено равновесие, то суммарный вес пар $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ составляет чётное количество граммов, и значит, первая пара (вместе с a равновесными ей) тяжёлая, а последняя – лёгкая. То есть, мы знаем тип каждой из взвешенных монет. Далее сформируем одну вспомогательную среднюю пару (например, $\{A, C\}$) и будем последовательно сравнивать с остальными невзвешенными парами (всего делаем $n – 1$ взвешивание), по результату определяем тип очередной пары. Так будут определены веса всех исходных пар, кроме одной. Зная, сколько среди всех этих $n – 1$ пар тяжёлых, а сколько лёгких, определяем тип последней пары, исходя из равенства количеств тяжёлых и лёгких пар среди всех n пар. Зная тип каждой пары, формируем нужные пары: средние не трогаем, а из каждой пары пар (лёгкая, тяжёлая) формируем две средние, беря по монете из каждой пары (назовём это *стандартной процедурой*).

Если же при сравнении $\{A, C\}$ с $\{B, D\}$ равновесия не будет, то можем и будем считать, что A с C весят больше, чем B с D (иначе просто переобозначим монеты: A <–> B, C <–> D). Суммируя то, что $\{A, B\}$ тяжелее $\{C, D\}$ и $\{A, C\}$ тяжелее $\{B, D\}$, получаем, что A тяжелее D, значит A весит 10 г, а D весит 9 г. Тогда B и C одинаковые, иначе в одном из двух выше рассмотренных взвешиваний было бы равновесие. Кроме того, если они 10-граммовые, то все a пар, с которыми пара $\{A, B\}$ попала в равновесие – тяжёлые, иначе – они средние. Эти a пар пока не трогаем, назовём их *главными*; пары $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ переформируем: сформируем среднюю пару $\{A, D\}$ и пару $\{B, C\}$, состоящую из одинаковых монет. Далее последовательно сравним $\{A, D\}$ с каждой из остальных пар (из изначально сформированных, отличных от уже взвешенных) кроме одной, всего сделав $n–1–(a+2)+(a+2)= n–1$ взвешиваний и определив тип каждой из этих $n–1–(a+2)$ пар. Пусть Y – последняя пара. Тогда мы «уже» знаем тип каждой пары, кроме Y, $\{B, C\}$ и a главных пар. Зная, что суммарно тяжёлых и лёгких пар одинаково, вычисляем x – разность количеств тяжёлых и лёгких пар среди Y, $\{B, C\}$ и a главных пар (она противоположна аналогичной разности количеств среди пар, у которых мы “уже” знаем тип).

Введём y: положим y=1, если Y тяжёлая, 0 – если Y средняя, и –1 – если Y лёгкая (мы «пока! не знаем значение y). Если $x > 0$, то мы понимаем, что $\{B, C\}$ тяжёлая и a главных пар – тяжёлые: иначе бы, согласно выше установленному, {B, C} была бы лёгкой и a главных пар были бы средними, и тогда было бы $x = –1+y \le 0$, что не так; и тогда имеем $x = 1+a+y$, откуда вычисляем y, то есть, мы знаем тип каждой пары, и тогда формируем нужные пары стандартной процедурой. Аналогично, при $x < 0$ получаем, что $\{B, C\}$ лёгкая и a главных пар средние (иначе $x=a+1+y \ge 0$,) и тогда из $x = –1+y$ находим y, то есть, знаем все пары, формируем нужные по стандартной процедуре. Остаётся рассмотреть случай x=0. При $a > 0$ в точности аналогичное рассуждение исключает случай $x = a+1+y$, и приводит к нужным парам. Наконец рассмотрим случай x=0=a: тогда главных пар 0 штук, а пара $\{B, C\}$ не средняя, тогда она «противоположна» паре Y, беря по монете из этих пар формируем 2 нужные пары. Из остальных пар (типы которых нам известны) формируем нужные пары по стандартной процедуре.

3-е решение.

Рассмотрим отдельно случай $n = 3$. Пронумеруем монеты числами от 1 до 6. Первым взвешиванием сравним монеты 1 и 2, вторым – монеты 3 и 4. Если получим два равенства, то в одной из этих пар монеты весят по 9 г, а в другой – по 10 г. Тогда пары {1, 3}, {2, 4}, {5, 6} весят по 19 г. Если в одном взвешивании, например в первом, будет неравенство, а во втором – равенство, то можно разбить монеты на пары {1, 2}, {3, 5}, {4, 6}. Если же оба взвешивания дадут неравенства, то искомые пары – {1, 2}, {3, 4}, {5, 6}.

Если $n \neq 3$, разобьём монеты на *пары* произвольным образом. Каждая пара весит 18 г, 19 г или 20 г, причём пар массой 18 г и 20 г поровну. Если для каждой пары мы определим её массу, то сможем получить требуемое разбиение монет. Действительно, пары массой 19 г можно оставить без изменений, а, объединив по одной монете из пар массами 18 г и 20 г, также получим искомые пары.

Сравним первую пару со второй, потом с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся пары. Если неравенство получено, то из всех пар, которые мы сравнили, сформируем первую *кучку*. Если остались пары, то будем действовать с ними аналогично и создавать новые кучки. В итоге получим несколько кучек, в каждой из которых пары имеют две различные массы. Возможно, несколько последних пар не образуют кучку, если они равны между собой. В каждой кучке выделим одну лёгкую и одну тяжёлую пары и объединим их в *группу*. Пронумеруем группы в соответствии с номерами кучек, которым они принадлежат.

Начнём сравнивать группы: первую группу сравним со второй, затем с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся группы. Если неравенство получено, например первая группа оказалась легче k-й (если наоборот, дальнейшие рассуждения аналогичны), то в первой группе лёгкая пара весит 18 г, а в k-й группе тяжёлая пара весит 20 г. Объединим эти две пары в новую группу X массой 38 г. Если k меньше числа групп, то сравним X со всеми группами, номера которых больше k – так мы узнаем массы пар во всех кучках, начиная с $(k+1)$-й. Если какие-то пары не попали в кучки, то сравним одну из них с половиной группы X (в которую входит по одной монете из составляющих её пар). Результат сравнения позволит узнать массы всех пар, не попавших в кучки.

Заметим, что если массы двух групп равны, то в этих группах лёгкие пары весят одинаково и тяжёлые пары тоже. Поэтому все лёгкие пары в кучках с первой по $(k-1)$-ю весят по 18 г, а все тяжёлые пары в k-й кучке – по 20 г. Таким образом, пока мы не узнали только массы тяжёлых пар в первых $k-1$ кучках и лёгких пар в k-й кучке. Они могут весить либо 19 г и 18 г, либо 19 г и 19 г, либо 20 г и 19 г соответственно. Учитывая, что общее число пар массой 18 г и 20 г одинаковое, мы однозначно можем определить, какой из случаев имеет место.

Если при сравнении групп мы дошли до последней группы и не получили ни одного неравенства (в частности, если число кучек равно 0 или 1), то во всех кучках лёгкие пары весят одинаково и тяжёлые пары тоже. Тогда мы имеем три *набора*, состоящие из равных пар: лёгкие пары в кучках, тяжёлые пары в кучках и пары, не попавшие в кучки (какие-то наборы могут оказаться пустыми). Обозначим число пар в этих наборах через a, b, c соответственно. Так как пар массой 18 г и 20 г поровну, то в большинстве случаев можно сразу понять, сколько весят пары в каждой группе: либо есть два набора, состоящие из одинакового числа пар, либо два набора содержат в сумме столько же пар, сколько и третий. Нельзя это понять, только когда одновременно выполняется более одного равенства, то есть в следующих трёх случаях.

1) $a = c$ и $a+c = b$. Тогда лёгкие пары весят по 18 г. Сравним тяжёлую пару с парой не из кучек. Если тяжёлая пара окажется легче, то они весят 19 г и 20 г, а если тяжелей – 20 г и 18 г соответственно.

2) $b = c$ и $b+c = a$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

3) $a = b = c$. Такое возможно, если n делится на 3. Так как $n \neq 3$, то в каждом наборе есть хотя бы по две пары. Объединим в группу одну лёгкую пару с одной тяжёлой и сравним её с двумя парами, не попавшими в кучки. Результат такого взвешивания однозначно определит массы всех пар.

Построим граф, в котором вершины соответствуют составленным в самом начале n парам. Рёбрами соединим две вершины, если соответствующие пары участвовали во взвешивании. Если взвешивались группы, то ребром будем соединять по одной паре из групп. Когда одна из пар сравнивалась с половиной группы X, соединим ребром эту пару с одной из пар, которая использовалась в формировании группы X. Тогда во всех рассмотренных случаях полученный граф не содержит циклов, поэтому число сделанных взвешиваний не превышает $n-1$.