Осенний тур. СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

6-7 кл., базовый вариант 15 *октября* 2023 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы ***Задачи***

3 1. Взяли все 6-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 (цифры в этих числах могут повторяться). Сколько из этих чисел делятся на 8?

1 2. А) У трех фермеров есть клетчатое поле 3×3, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 3 участка равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 4 ягоды так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

3 Б) Решите такую же задачу для четырех фермеров, у которых поле 4×4, они делят его на 4 равных по площади участка (многоугольника), а ворона хочет утащить незаметно для фермеров 5 ягод.

4 3. Пятиклассник Вася утверждает, что он может записать не менее восьми чисел, удовлетворяющих условиям. Наименьшее общее кратное всех этих чисел равно 462. Для любых двух чисел их наименьшее общее кратное меньше 250. Если эти числа перемножить и умножить на 4, то в результате получится куб некоторого натурального числа. Прав ли Вася?

3 4. А) На асфальте нарисована полоса 1×6 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 5 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

3 Б) Тот же вопрос для игры на полосе 1×10 и 9 прыжков девочек.

6 5. Петя и Вася нашли 20 кубиков одинакового размера, 10 из них были белого цвета и 10 — чёрного. Они придумали такую игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 20 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Осенний тур. СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

6-7 кл., базовый вариант 15 *октября* 2023 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы ***Задачи***

3 1. Взяли все 6-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 (цифры в этих числах могут повторяться). Сколько из этих чисел делятся на 8?

1 2. А) У трех фермеров есть клетчатое поле 3×3, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 3 участка равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 4 ягоды так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

3 Б) Решите такую же задачу для четырех фермеров, у которых поле 4×4, они делят его на 4 равных по площади участка (многоугольника), а ворона хочет утащить незаметно для фермеров 5 ягод.

4 3. Пятиклассник Вася утверждает, что он может записать не менее восьми чисел, удовлетворяющих условиям. Наименьшее общее кратное всех этих чисел равно 462. Для любых двух чисел их наименьшее общее кратное меньше 250. Если эти числа перемножить и умножить на 4, то в результате получится куб некоторого натурального числа. Прав ли Вася?

3 4. А) На асфальте нарисована полоса 1×6 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 5 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

3 Б) Тот же вопрос для игры на полосе 1×10 и 9 прыжков девочек.

6 5. Петя и Вася нашли 20 кубиков одинакового размера, 10 из них были белого цвета и 10 — чёрного. Они придумали такую игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 20 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 15 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
4	1.	На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?
4	2.	Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, его стороны AB и CD параллельны. Известно, что углы DAC и ABD равны, а также углы CAB и DBC равны. Обязательно ли $ABCD$ — квадрат?
5	3.	У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?
5	4.	По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?
5	5.	Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 — чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 15 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(-x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов $a_n, \ldots, a_1, a_0$ (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?
4	2. На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?
4	3. Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?
5	4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P — произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' — проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP.
6	5. У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?