СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **Осенний тур**

6-7 кл., **сложный вариант** 29 октября 2023 г.

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы ***Задачи***

4 1. Даны точки A, B, C и D так, что отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Отрезок AE на 1 см короче, чем отрезок AB, $AE = DC$, $AD = BE$, $\angle ADC = \angle DEC$. Найдите длину EC.

2 2. А) В каждую клетку доски 4×4 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую — число 6?

3 Б) Решите такую же задачу для доски 8×8.

5 3. В клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 ладей, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить ладей противоположного цвета (ладьи не прыгают друг через друга). Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске осталась одна ладья?

7 4. Трудолюбивый Фома выписал все трехзначные числа, в записи которых нет нулей. Для каждого такого числа неутомимый Ерёма записал сумму двух его цифр: наименьшей и наибольшей (если в некотором числе эти цифры совпадают, то он суммировал обе цифры). Найдите сумму чисел, записанных Ерёмой.

9 5. Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. Петя записал в карточку два натуральных числа так, чтобы она была правильной, а Вася утверждает, что за 4 хода может получить из Петиной карточки любую другую правильную карточку. Прав ли Вася? (Свой ответ объясните: если считаете, что Вася прав, то укажите, как он должен действовать, если нет, то докажите это.)

11 6. Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники периметра 2. Сколько прямоугольников могло получиться? (Укажите все возможные значения и обоснуйте.)

12 7. В выражении СЕМЬ × ВОКРУГ – КРУГ × ВОСЕМЬ одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, а разные – разными.

А) Докажите, что значение выражения делится на 10000.

Б) Может ли значение выражения делиться на 100000?

В) Может ли значение выражения делиться на 1000000?

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 — 1. В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую — число 6?

6 — 2. В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $1/6$.

7 — 3. Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

7 — 4. Дан треугольник ABC с углом A, равным 60°. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

9 — 5. У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая — весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов — одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

10 — 6. Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

12 — 7. В белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, ..., 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

5 — 2. Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

3 — а) Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

6 — б) Может ли количество прямоугольников равняться 23?

9 — 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $S/8$.

10 — 5. Хорда DE описанной около треугольника ABC окружности пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно, точка P лежит между D и Q. В треугольниках ADP и QEC провели биссектрисы DF и EG. Оказалось, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности. Докажите, что точки A, P, Q, C лежат на одной окружности.

12 — 6. Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора $\{1, \ldots, 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

14 — 7. На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n — по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).