СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **Весенний тур**

6-7(5) классы, сложный вариант 10 марта 2024 г.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

- *Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты;*
- *баллы за пункты одной задачи суммируются*

Баллы ***Задачи***

3

1. Сможете ли Вы расставить числа 0, 3, 6, 7, 10, 13, 14, 17, 20 в клетки таблицы 3×3 (каждое по одному разу и в свою клетку) так, чтобы все суммы чисел, стоящих в одной строке или в одном столбце были равны между собой? Если – да, то покажите как, если – нет, то обоснуйте это.

Ответ: да, см. слева один из вариантов.

3	14	13
20	10	0
7	6	17

4

2. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *O*. Оказалось, что углы $\angle OAB$, $\angle OBA$, $\angle OBC$, $\angle OCA$ равны между собой, а $\angle OAC = \angle OCB$. Найдите углы исходного треугольника.

Ответ: все углы равно по 60°.

Решение. ВО – биссектриса. Кроме того, углы треугольника при вершинах А и С равны, т.е. треугольник равнобедренный, и тогда, продлив ВО до пересечения с АС в точке Н, получим, что ВН – высота и медиана, откуда легко получаем, что все отмеченные в условии углы равны, т.е. все углы треугольника равны между собой и равны 60°.

6

3. На конном заводе проводили соревнования: нужно за наименьшее время подковать 30 лошадей. В одной из бригад для этого имелось 24 кузнеца. Известно, что каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Предложите порядок действий, чтобы выполнить задание. При этом помните, нужно не только найти минимально возможное время, но указать, как нужно для этого действовать. (И еще помните, что лошадь не может стоять на двух ногах.)

Ответ: 25 минут.

Решение. Всего нужно 600 минут (30 лошадей × 4 подковы × 5 минут) – это как раз время, которое затратил бы один кузнец на все подковы, но поскольку кузнецов 24, то понадобится не менее 600 : 24 = 25 минут (это оценка снизу).

Покажем, как кузнецы могут выполнить задание. Разобьем лошадей на 5 групп по 6 лошадей в каждой, а кузнецов на 4 группы – тоже по 6 в каждой (пусть каждая группа кузнецов отвечает за одну конкретную ногу у лошади, например, одна группа кузнецов за левую переднюю ногу у каждой лошади, другая – за правую переднюю и т.д.). Поставим в круг эти пять групп лошадей, и около 4 групп по одной группе кузнецов подряд около каждой такой группы. За 5 минут кузнецы подкуют по одной ноге у каждой лошади в «своей» группе. Затем сдвинем группы кузнецов по кругу, как бы «по циклу», и каждая группа подкует у лошадей «свои» ноги в следующей группе и тоже за 5 минут. И так далее: за 25 минут, каждая группа кузнецов побывает и подкует ноги во всех группах лошадей.

8

4. Буратино, лиса Алиса и кот Базилио нашли клад, в котором были золотые, серебряные и медные монеты. Буратино рассказал о находке следующее: количество медных монет не менее 16 монет, а общее количество монет в кладе не более 29. Алиса сказала, что число золотых монет ближе к 1/8, чем к 1/9 от общего числа монет. Базилио сказал, что число золотых монет ближе к 1/8, чем к 1/7 от общего числа монет. Сколько всего монет в кладе? (Ответ обоснуйте. При этом помните, что все в этой задаче говорят правду.)

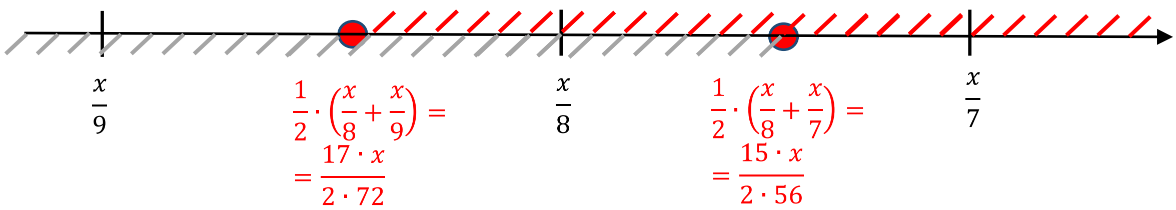
Ответ: возможны три варианта ответа: 23, 24 или 25 монет.

Первое и второе решения (см. фото); при этом начальная модель и система неравенств в этих решениях одна и та же, но в первом предполагается полный перебор всех возможных «количеств монет *x*» от 16 до 29, а во втором отталкиваемся от оценки количества золотых монет *y*, которых в итоге может быть только 3.

Подчеркнем, что во всех случаях нужна проверка ответа.

Пусть *x* – общее количество монет, *y* – количество золотых, *z* – медных монет. Из условия имеем:

$z \geq 16$; $x \leq 29$.   А для y изобразим соответствующие оценки из условия задачи на числовой оси:



Красным (штрихи над числовой осью) отмечено то, что сказала Алиса, серым (штрихи под числовой осью) – то, что сказал кот Базилио. Отсюда получаем основное неравенство: $\frac{17x}{72} < 2y < \frac{15x}{56}$.   (1)

Первое решение. Один из вариантов решения – перебрать все возможные значения x от 16 (если считать, что золотых и серебряных монет нет) до 29. Отбрасывая «невозможные» случаи (например, когда из (1) получится $2y$ нечетным, или вообще «не целым»), получим возможные ответы при $x = 23, 24$ и 25 (при этом $y = 3$). Проверка подтверждает эти ответы.

Второе решение. Другой вариант: из неравенств (1) получить оценки:

- из правой части неравенства $y < 3{,}88\ldots$ (при $x = 29$)
- из левой части неравенства $y > 1{,}88\ldots$ (при $x = 16$)

Но при $y = 2$ обязательно будет $x \geq 18$, и тогда на y получится более сильное неравенство: $y > 2$. Остается $y = 3$, откуда и из (1) вновь будем иметь значение $x = 23, 24$ и(или) 25.

Третье решение. Пусть вновь x – общее количество монет, y – количество золотых монет. Тогда из утверждения Алисы следует, что $y > \frac{1}{9}x$. См. (сравни) оценки выше.

Аналогично из высказывания Базилио следует, что $y < \frac{1}{7}x$ т.е. $\frac{1}{9}x < y < \frac{1}{7}x$.   (2)

Т.к. $x < 29$, то $y < \frac{1}{7}\cdot 29$, т.е. $y \leq 4$. Очевидно, что если золотых монет нет (т.е. $y = 0$), то высказывания Алисы и Базилио не верны. Если $y = 1$, то $x < 9$ чего быть не может, так как медных монет не меньше 16. Если $y = 2$, то $x < 18$. Тогда монет 17, а медных получится 15. Противоречие.

Если $y = 4$, то $28 < x < 36$, то есть $x = 29$, и тогда: $\frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$, $\frac{29}{7} = 4\frac{1}{7}$. При этом очевидно, что 4 ближе к $\frac{29}{7}$. Противоречие с условием кота Базилио.

Если $y = 3$, то согласно неравенствам (2) $21 < x < 27$. Тогда $x = 22$, или 23, или 24, или 25, или 26.

Для $x = 22$: $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$. $\frac{22}{8} = 2\frac{3}{4}$. Но 3 ближе к $\frac{22}{7}$ – не подходит

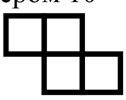
Для $x = 23$: $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$. $\frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}$, $\frac{23}{9} = 2\frac{5}{9}$, и это значение x удовлетворяет условиям.

Аналогично подходят значения $x = 24, 25$.

А $x = 26$ – снова не подходит. (Все последние проверки простые). Значит, монет или 23, или 24, или 25.

10

5. На поле для игры в морской бой размером 10 × 10 расположен корабль следующей формы:



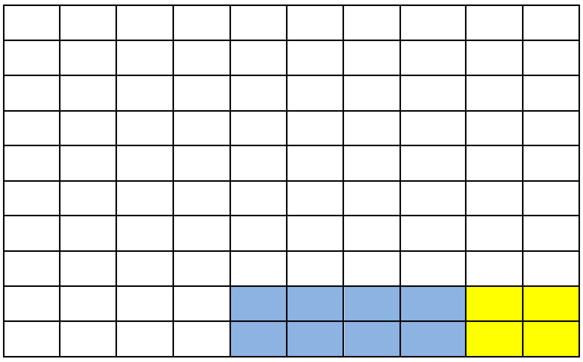
Какое наименьшее число выстрелов необходимо произвести, чтобы гарантированно ранить этот корабль? Ответ обоснуйте.

Ответ: 25.

Решение. Пример на 25 выстрелов:

	x		x		x		X		X
	x		X		X		X		X
	x		X		X		X		X
	x		X		X		X		X
	x		x		X		x		X

Покажем, что 24 выстрелов недостаточно. Очевидно, нужно выстрелить по меньшей мере дважды в каждый прямоугольник 2 × 4. Легко вырезать из исходного поля 12 прямоугольников 2 × 4, оставив угловой квадратик 2 × 2. Следовательно, если мы хотим справиться за 24 выстрела, мы должны выстрелить ровно по 2 раза в каждый из полученных прямоугольников 2 × 4 и при этом не стрелять в угловой квадратик 2 × 2.



Очевидно, если ни разу не выстрелить в угловой желтый квадратик (более светлая заливка), то необходимо выстрелить в каждую из двух правых клеток синего прямоугольника, и еще потом по меньшей мере один раз выстрелить в этот синий прямоугольник, т.е. в один из 12 прямоугольников 2 × 4 придется выстрелить трижды. Поэтому за 24 выстрела задача не решается.

---

6. Имеются три числа. За один ход разрешается прибавить к любым двум числам по единице или вычесть из любых двух чисел по единице. Можно ли за несколько операций из чисел 1, 2, 3 получить тройку:

1 А) 5, 13, 4?

2 Б) 6, 9, 16?

3 В) Как по двум наборам понять, можно ли получить из первого второй или нет? (Предложите соответствующие условия и обоснуйте их.)

5 Г) В каждой вершине правильного шестиугольника записано по целому числу. За один ход разрешается прибавить по единице к любым двум числам или вычесть по единице из любых двух чисел, записанных в вершинах «через одну». Как понять, можно ли из одного набора чисел, записанного в вершинах шестиугольника, получить другой набор? (Предложите соответствующие условия и обоснуйте их.)

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. А) (1, 2, 3) – (5, 6, 3) – (5, 7, 4). Далее покажем, как за три хода увеличить некоторое число на 2: (5, 7, 4) – (6, 8, 4) – (6, 9, 5) – (5, 9, 4)

Повторив такую операцию дважды, получим требуемый набор.

Б) очевидно, четность суммы всех чисел при описанной операции не меняется, поэтому из набора (1, 2, 3) нельзя получить набор (6, 9, 16).

В) Очевидно, что четности сумм цифр в двух наборах должны совпадать. Покажем, что это необходимое условие является и достаточным. Пусть из набора (a, b, c) надо получить набор (x, y, z). Сделаем такие ходы: (a, b, c) - (x, b +x – a, c) – (x, b+x-a+z-c, z). Теперь надо из числа b+x-a+z-c получить число y. Нетрудно видеть, что если суммы чисел в двух наборах одной четности, то и числа b+x-a+z-c и y одной четности и второе число можно получить из первого прибавлением или вычитанием нескольких двоек. В пункте а) было показано, как к любому числу прибавить или вычесть двойку. Следовательно, из числа b+x-a+z-c можно получить число y.

Г) Суперкраткое решение. Нетрудно видеть, что задача сводится к предыдущей, т.к. набор из шести чисел разбивается на два поднабора по три числа (первое-третье-пятое и второе-четвертое-шестое), и с каждым из наборов происходит то же, что и с тройкой в предыдущей задаче.

---

3 7. **А)** Петя и Вася выставили на длинную клетчатую полоску 10 фишек. Петя посчитал количество пар среди этих фишек таких, что между ними находится нечетное число других фишек, а Вася посчитал количество пар фишек таких, что между ними находится четное число других фишек. (Любая фишка может входить в разные пары фишек, которые считают мальчики; число 0 является четным). Петя сказал, что у него получилось больше пар, чем у Васи. Прав ли он? Ответ объясните.

4 **Б)** Тот же вопрос, для случая, когда Петя и Вася поставили на клетчатую полоску *N* фишек (где *N* – некоторое натуральное число, большее 10).

5 **В)** Тот же вопрос, но теперь Петя и Вася ставят *N* различных точек в квадрате 10×10, и считают соответствующие пары точек так, чтобы нечетное или четной число точек лежало на отрезке их соединяющем (квадрат «неклетчатый» и точки можно ставить, где угодно).

	Ответ: Во всех случаях Петя не прав. **Решение. А)** Перенумеруем фишки в порядке следования от 1-й до 10-й. Пары фишек, которые считает Петя (далее будем говорить про них – Петины пары), это фишки с номерами одинаковой четности, например, пары фишек с четными номерами: но таких фишек 5 (с номерами 2, 4, 6, 8, 10), а пар из пяти фишек можно выбрать 10 способами (число сочетаний из 5 по 2). Аналогично для фишек с нечетными номерами. Итак, Петя насчитает 20 пар. Но Васины пары – это пары фишек с номерами разной четности, т.е. их $5 \times 5 = 25$, поэтому здесь Петя не прав. **Б)** Аналогично пункту А) можно посчитать количество Петиных пар и Васиных пар. Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) четное значение $N = 2k$, и тогда у Пети количество пар $k(k - 1)$, а у Васи k^2. 2) нечетное значение $N = 2k+1 = k + (k+1)$ (сначала в сумме стоит число фишек с четными номерами, а затем с нечетными), и тогда у Пети количество пар $(k(k - 1) + (k+1)k) : 2 = k^2$, а у Васи $k\times(k+1)$. В обоих случаях у Васи больше. **В)** Рассмотрим все различные прямые, проходящие через всевозможные пары точек, поставленных Петей и Васей. Таких прямых конечное число (ибо пар точек конечно), при этом на некоторых прямых может оказаться более двух из поставленных точек. Но все отрезки, соединяющие какие-то из выставленных точек, будут лежать на каких-то из этих прямых. Далее воспользуемся результатом пункта Б), в котором роли полоски будут играть прямые, а роль фишек – точки, лежащие на соответствующих прямых. В любом случае, как получено в пункте Б), количество Васиных пар будет больше, чем Петиных, а значит, и суммарное значение у Васи будет больше.