10 – 11 класс **Предварительные решения**

заданий 10-11 класса 46-го Тур Гор (*осень базовый тур от* **6 окт 2024 г.)**

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

1. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?

Ответ: Нет.

Первое решение. Рассмотрим 50-ый и 51-й камни. В начале 50-й – белый камень, а 51-й – черный. Если в какой-то момент они станут одного цвета, то дальше они всегда будут одного цвета (данная операция не может это поменять). Значит, они одновременно должны поменять цвет. Но наша операция может цвета только на один какой-то определенный. Значит, такого быть не может.

Второе решение. Представим ряд камней в виде последовательности натуральных чисел, где 1-ое число указывает на количество черных камней в начале ряда, 2-ое число количество белых камней, следующие после черных камней в начале, 3-е число (если существует) количество черных камней после предыдущих белых и т.д., и сумма всех чисел в последовательности равна 100. Таким образом, требуется перейти из последовательности (1; 1; 1; …; 1) в (50; 50). Когда мы перекрашивает какие-то камни, то эти камни перекрашиваются в другой цвет, тогда если в последовательности (…; a; b; c; …) перекрашиваются b камней, то они приобретают тот цвет, что и соседние a и c камни, т.е. числа a, b и c заменяются одним числом $a+b+c$. Изначально все числа в последовательности нечетные. Тогда выбранные числа a, b и c будут нечетными и заменятся нечетным числом. Таким образом, в последовательности все числа всегда будут нечетными, а требуется получить последовательность с четными числами, что невозможно.

2. У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны 1. У каждого многочлена степень нечётна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого.

Ответ: –2024.

Решение: Пусть корни первого многочлена $x_1, x_2, ..., x_k$ (k нечетно), тогда $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_k)$, корни второго многочлена $Q(x)$ $y_1, y_2, ..., y_m$ (m нечетно), тогда $Q(x)=(x-y_1)(x-y_2)...(x-y_m)$. Значения первого многочлена в корнях второго это: $P(y_j)=(y_j-x_1)(y_j-x_2)...(y_j-x_k)$, $j=1,2,...,m$, всего m значений. Произведение этих значений равно 2024, и оно содержит среди своих сомножителей все скобки вида (y_j-x_i), $j=1,2,...,m$, $i=1,2,...,k$, и только такого вида (всего $k \cdot m$ скобок). Произведение значений второго многочлена в корне первого содержит такие же скобки только в виде (x_i-y_j), т.е. они отличаются знаком. Поэтому искомое произведение равно –2024.

3. В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, - наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными?

Ответ: нет.

Решение. Для начала важно заметить, что для любого $m \in N$ наименьшее натуральное число, на которое m не делится – это степень простого числа.

Действительно, пусть m делится на $1,2,3,...,n$ и не делится на $(n+1)$.
Пусть $n+1 = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_e^{k_e}$ $(e \geq 2)$, где все p_i – попарно различные простые числа. Но тогда все сомножители $p_i^{k_i} < n+1$, т.е. m делится на каждое из $p_i^{k_i}$, а значит, и на их произведение, т.е. на $n+1$. Получили противоречие.

Но тогда среди 5 заданных чисел второе, третье и четвертое – степени простого числа, и каждое из них не будет делиться либо на 2, либо на 3. Значит, среди последних трех чисел в этой пятерке будут либо 2-ки, либо 3-ки, и по принципу Дирихле среди них найдутся два одинаковых.

4. В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF, так чтобы образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами 1 и 100 (точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O, причем угол EOG равен $120°$. Чему равна сторона треугольника ABC?

Ответ: 111.

Решение. Построим точку X такую, что $EDGX$ - параллелограмм, причем XE||DG; $\angle XEF = 180° - \angle EOG = 60° = \angle XEG + \angle GEF$,

$\angle XGC = \angle ACB = 60° = \angle XEG + \angle GXE$. Следовательно, $\angle GEF = \angle GXE$. Далее $\angle XGE = \angle EGF = 120°$. Значит, ΔEGF подобен ΔXGE (по двум углам), причем $\frac{EG}{GF} = \frac{GX}{EG}$, т.е. $EG^2 = GX \cdot GF = 100$, $EG = 10$, а $AC = 1 + 10 + 100 = 111$.

5. Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней. Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс?

Ответ: нет, не всегда.

Решение. Пусть, например, в первой куче будут камни с массами 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; x, где $x \geq 91$, а во второй все камни весят одинаково по 10. Покажем, что в этом случае даже зная массы всех камней, кроме камня с массой x, нам ответ найти не удастся. Действительно, взвешивание любых комбинаций камней без камня x никакой дополнительной информации нам не даст (мы и так знаем все массы), а если x будет использоваться, то чаша, где лежит камень x всегда перевесит.

Таким образом, x узнать не сможем. В тоже время, если $x = 91$, то суммарная масса всех камней в правой куче $91{,}9 < 100$ (вторая тяжелее), а если $x = 100$, то $100{,}9 > 100$ (первая куча тяжелее).