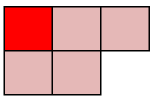
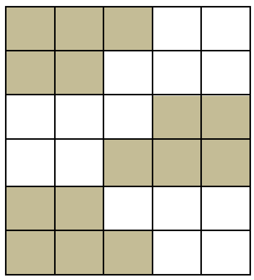
(5) 6 – 7 класс **Предварительные решения**

заданий 6-7 класса 46-го Тур Гор (*осень базовый тур от* **6 окт 2024 г.**)

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

Баллы за пункты одной задачи суммируются.

Баллы	*Задачи*
1 **3**	1. Болек и Лелек покрывают клетчатый прямоугольник размером 5×6 клеток фигурками, изображенными на рис. 1 и рис. 2, так чтобы фигурки располагались по линиям сетки.  Рис.1  Рис. 2 Они кладут фигурки по очереди, причем Болек кладет свои фигурки первый и использует четырехклеточные фигурки (тетрамино), а Лелек кладет вторые фигурки (одноклеточные). А) В первый день они действовали дружно и старались полностью покрыть данный прямоугольник. Смогут ли они, действуя сообща, покрыть прямоугольник? (Если да, то покажите как, если нет, то обоснуйте это). Б) На второй день они поссорились, и Лелек сказал, что постарается помешать Болеку в выполнении такой задачи (т.е. в покрытии прямоугольника, при этом кладут свои фигурки они все равно по очереди). Сможет ли Лелек помешать Болеку в покрытии прямоугольника, и если – да, то как?! **Ответ: А) Да, смогут. Б) Да, сможет помешать.** **Решение.** А) Из двух данных фигурок легко сложить пентамино такое как на рис. 3, а этими пентамино легко покрыть прямоугольник 5×6 (рис. 4).  Рис. 3 Рис. 4 →  **Решение.** Б) Для удобства будем использовать шахматную раскраску, при этом среди 30 клеток прямоугольника черных и белых клеток будет поровну – по 15. Заметим, что тетрамино в любом расположении на прямоугольнике покрывает по две черные и белые клетки. То есть Болек, используя все 6 тетрамино, накроет 12 черных и 12 белых клеток. Однако, когда он положит 4 (четыре) свои фигурки будет накрыто 8 черных клеток и на оставшиеся 2 его фигурки нужно еще 4 черные клетки. Зная это, Лелек может с самого начала класть свои одноклеточные фигурки только на черные клетки, и после 4 (четырех) ходов обоих детей будет накрыто 8+4=12 черных клеток, останется 3 черные клетки, т.е. после этого все оставшиеся клетки будут располагаться так, что среди них нельзя будет положить две тетрамино указанного вида, т.е. Болеку некуда будет ставить последнюю свою фигурку.

4

2. Можно ли разместить в квадрате со стороной 1 метр некоторое количество непересекающихся и не касающихся друг друга кругов так, чтобы сумма их радиусов была равна 2024 метра? Если да, то объясните как, если нет, то докажите это.

Ответ: Да.

Решение. Разделим каждую сторону квадрата на 20000 одинаковых частей (на каждый стороне будет 19999 точек деления).

Соединим точки деления на противоположных сторонах отрезками, параллельными сторонам квадрата, так чтобы квадрат разбился на маленькие квадраты со стороной $\frac{1}{20000}$ м = $\frac{1}{200}$ см. На рис. 5 представлен левый верхний угол получившегося разбиения в увеличенном виде.

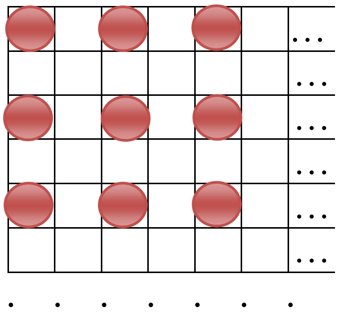


Рис. 5.

Вдоль левой стороны располагаются 20000 маленьких квадрата. Поместим в эти квадраты (через один) круги так, чтобы они касались сторон «своего квадрата» (см. рис. 5).

Все эти круги не касаются друг друга, их радиусы равны $\frac{1}{40000}$ м, а их общее число вдоль левой стороны большого квадрата равно 10000. Таким образом, сумма радиусов кругов в такой полоске из квадратов равна $\frac{1}{40000} \cdot 10000 = \frac{1}{4}$ м.

Поместим такие же круги в третью, пятую и т.д. «полоски из квадратов» как показано на рис. 5 (т.е. полоски через одну, если считать слева на право). Таких вертикальных полосок будет 10000, но тогда суммарный радиус всех кругов будет равен $10000 \cdot \frac{1}{4}$ м $= 2500$ м даже больше чем нужно.

Для того чтобы получить требуемое значение суммы радиусов (2024 м). поместим круги не во все 10000 полосок, а только в 8096 из них.

Примечание. Некоторые участники олимпиады пытались использовать для решения концентрические круги, помещённые в большой квадрат. Однако, такое решение неверно, ибо по условию круги не пересекаются, а здесь получается, что одни круги (а это окружности и их внутренние части) целиком лежат в других.

1

3. А) В ряд лежат 10 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 5 чёрных камней, а потом 5 белых?

4

Б) Тот же вопрос, если в ряд лежат 20 камней, а после перекрашиваний получится ряд, в котором сначала идут 10 чёрных камней, а потом 10 белых.

Ответ: А) Да. Б) Нет.

Решение. А) В этом пункте порядок действий простой: сначала перекрасим белые камни между первым и третьим черными и потом между третьим и пятым черными; а потом аналогично черные камни перекрасим в белые во второй половине ряда.

Первое решение пункта Б). Рассмотрим 10-й и 11-й камни. В начале 10-й камень – белый, а 11-й – черный. Если в какой-то момент они станут одного цвета, то дальше они всегда будут одного цвета (наша операция не может это поменять). Значит, они одновременно должны поменять цвет. Но каждая операция меняет цвета только на какой-то определенный (черный или белый). Значит, такого быть не может.

Второе решение пункта Б). Представим ряд камней в виде последовательности натуральных чисел, где 1-ое число указывает на количество черных камней в начале ряда, 2-ое число количество белых камней, следующие после черных камней в начале, 3-е число (если существует) количество черных камней после предыдущих белых и т.д., и сумма всех чисел в последовательности равна 20. По условию требуется перейти из последовательности (1; 1; 1; …; 1) в (10; 10). Когда мы перекрашивает какие-то камни, то это камни перекрашиваются в другой цвет, тогда если в последовательности (…; a; b; c; …) перекрашиваются b камней, то они приобретают тот цвет, что и соседствующие с ними a и c камней, т.е. числа a, b и c заменяются одним числом $a+b+c$. Изначально все числа в последовательности нечетные. Тогда выбранные числа a, b и c будут нечетными и заменятся нечетным числом. Таким образом, в последовательности все числа будут всегда нечетными, а требуется получить последовательность с четными числами, что невозможно.

6

4. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N. Оказалось, что N делится на M. Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N.

Первое решение. Представим число М в виде произведения упорядоченных по возрастанию простых сомножителей: $M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1 \le p_2 \le p_3 \le \ldots \le p_k$. Покажем, что все простые сомножители равны либо 2, либо 3. Действительно, пусть p_k - самый большой простой делитель (возможно, таких будет несколько), и он больше 3, т.е. это либо 5, либо 7, и т.п., и обязательно нечетный. В числе N он превратится в $p_k+1=2\cdot q_k$ (и точно также все p_k, если их несколько причем, в числе N делителя p_k уже не будет, а значит N не делится на M.

Итак, $M=2^{k_2}\cdot 3^{k_3}$, а $N=(2+1)^{k_2}\cdot(3+1)^{k_3}=3^{k_2}\cdot 4^{k_3}=2^{2k_3}\cdot 3^{k_2}$, и поскольку N делится на M, то $k_3\le k_2\le 2k_3$. (*)

Новое число будет равно $W=(2+1)^{2k_3}\cdot(3+1)^{k_2}=2^{2k_2}\cdot 3^{2k_3}$, и как видим из (*), степени чисел 2 и 3 удовлетворяют неравенствам $2k_2\ge 2k_3$, $2k_3\ge k_2$, т.е. W делится на N.

Второе решение (*для знающих основную теорему арифметики*).
Представим число M в виде произведений степеней различных простых делителей: $M=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$.

Тогда $N=(p_1+1)^{k_1}\cdot(p_2+1)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(p_m+1)^{k_m}=$ (**)

$$=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{n_m}\cdot p_{m+1}^{n_{m+1}}\cdot\ldots\cdot p_e^{n_e} \qquad (***)$$

Во выражении (***) учтено, что N делится на M (нацело), т.е. $n_1\ge k_1,\ n_2\ge k_2,\ldots,\ n_m\ge k_m$, и кроме того в N могут быть и другие простые делители: не только $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_m$, но некоторые новые, которые мы обозначили через $p_{m+1},\ldots,\ p_e$. Проделав такую же операцию над числом N получим новое число:

$$W=(p_1+1)^{n_1}\cdot(p_2+1)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(p_m+1)^{n_m}\cdot(p_{m+1}+1)^{n_{m+1}}\cdot\ldots\cdot(p_e+1)^{n_e}.$$

Сравнивая это представление с представлением (**) и учитывая, что $n_1\ge k_1,\ n_2\ge k_2,\ldots,\ n_m\ge k_m$, получаем требуемое.

6

5. Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 15 г на 4 куска. Затем мама распределяет 14 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?

Решение. Сын победит, если разрежет сыр на кусочки 1г, 2г, 4г, 8г. Пусть его мама положила на первую тарелку n масла. Рассмотрим все случаи при $n\le 7$, т.к. для $n\ge 7$ все аналогично, просто тарелки поменяются местами.

При $0\le n\le 1$. Тогда сын на первую тарелку положит кусочек сыра массой 1г. На второй тарелке тогда будет 14г сыра и $(14-n)$ г масла. Очевидно, что $14\ge 14-n$ (т.к. $n\ge 0$) и $1\ge n$.

При $1\le n\le 2$. Тогда сын на первую тарелку положит сыр массой 2г.

Пусть $n=1+n_1$. Тогда $0\le n_1\le 1$. На второй тарелке окажется 13г сыра и $14-n=13-n_1$ г масла $13\ge 13-n_1$ $(n_1\ge 0)$ и $2\ge n$.

	При $2 \le n \le 3$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочек сыра массой 1г и 2г. Пусть $n = 2 + n_2$. Тогда $0 \le n_2 \le 1$. На второй тарелке окажется 12г сыра и $14 - n = 12 - n_2$ г масла $12 \ge 12 - n_2$ $(n_2 \ge 0)$ и $3 \ge n$. При $3 \le n \le 4$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочек сыра массой 4г. Пусть $n = 3 + n_3$. Тогда $0 \le n_3 \le 1$. На второй тарелке окажется 11г сыра и $14 - n = 11 - n_3$ г масла $11 \ge 11 - n_3$ $(n_3 \ge 0)$ и $4 \ge n$. При $4 \le n \le 5$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочек сыра массой 4г и 1г. Пусть $n = 4 + n_4$. Тогда $0 \le n_4 \le 1$. На второй тарелке окажется 10г сыра и $14 - n = 10 - n_4$ г масла $10 \ge 10 - n_4$ $(n_4 \ge 0)$ и $5 \ge n$. При $5 \le n \le 5$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочек сыра массой 4г и 2г. Пусть $n = 5 + n_5$. Тогда $0 \le n_5 \le 1$. На второй тарелке окажется 9г сыра и $14 - n = 9 - n_5$ г. масла. $9 \ge 9 - n_5$ $(n_5 \ge 0)$ и $6 \ge n$. При $6 \le n \le 7$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочек сыра массой 4г, 2г и 1г. Пусть $n = 9 + n_6$. Тогда $0 \le n_6 \le 1$. На второй тарелке окажется 8г сыра и $14 - n = 8 - n_6$ г масла $8 \ge 8 - n_6$ $(n_6 \ge 0)$ и $7 \ge n$. Т.к. при $n \ge 7$ все аналогично, только тарелки поменяются местами, то как бы мама не распределила масло, сын победит. **Второе решение.** Заметим, что 15=1+2+4+8, это наводит на мысль использовать двоичную систему счисления. Сын именно так порежет сыр. Любое целое число граммов масла, которое мама распределит на одну из тарелок, можно представить в двоичной системе (например, 7=1+2+4) и сразу становится ясно, какие куски сыра здесь нужно использовать сыну, а оставшийся сыр пойдет на вторую тарелку. Если же мама на одну из тарелок положит нецелое число граммов масла: $x \in (k; k+1]$, то сын представит в двоичной системе число $(k+1)$, что даст значение для тех кусков сыра, которые он использует для этой тарелки. На вторую тарелку мама тогда положит $y = 14 - x$ граммов масла, $y \in [13-k; 14-k)$, а сын $15 - (k+1) = 14 - k$ грамм сыра.