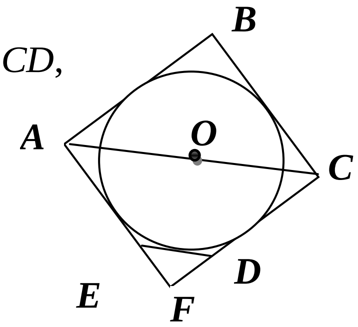
**8 – 9 класс** **Предварительные решения**

заданий 8-9 класса 46-го Тур Гор (*осень базовый тур от* **6 окт 2024 г.)**

*Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*

| *Баллы* | *Задачи* |
|---|---|
| **4** | 1. Дан описанный пятиугольник $ABCDE$. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали $AC$. Докажите, что $AB+BC>CD+DE+EA$.<br><br>**Решение:** Пусть $F$ – точка пересечения прямых $AE$ и $CD$. Окружность вписана в углы $BAF$ и $BCF$, значит $\angle BAC=\angle FAC$ и $\angle BCA=\angle FCA$. Тогда $\Delta ABC=\Delta AFC$ по общей стороне $AC$ и двум прилежащим к ней углам.<br>В $\Delta EFD$ $EF+FD>ED$, тогда<br>$AB+BC=AF+FC=AE+\left(EF+FD\right)+CD>AB+ED+CD$,<br>что и требовалось доказать.<br> |
| **4** | 2. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?<br>**Ответ: Нет.**<br>**Первое решение.** Рассмотрим 50-ый и 51-й камни. В начале 50-й – белый камень, а 51-й – черный. Если в какой-то момент они станут одного цвета, то дальше они всегда будут одного цвета (данная операция не может это поменять). Значит, они одновременно должны поменять цвет. Но наша операция меняет цвета только на один какой-то определенный. Значит, такого быть не может.<br>**Второе решение.** Представим ряд камней в виде последовательности натуральных чисел, где 1-ое число указывает на количество черных камней в начале ряда, 2-ое число количество белых камней, следующие после черных камней в начале, 3-е число (если существует) количество черных камней после предыдущих белых и т.д., и сумма всех чисел в последовательности равна 100. Таким образом, требуется перейти из последовательности (1; 1; 1; …; 1) в (50; 50). Когда мы перекрашивает какие-то камни, то эти камни перекрашиваются в другой цвет, тогда если в последовательности (…; *a; b; c*; …) перекрашиваются *b* камней, то они приобретают тот цвет, что и соседние *a* и *c* камни, т.е. числа *a, b* и *c* заменяются одним числом *a*+*b*+*c*. Изначально все числа в последовательности нечетные. Тогда выбранные числа *a*, *b* и *c* будут нечетными и заменятся нечетным числом. Таким образом, в последовательности все числа всегда будут нечетными, а требуется получить последовательность с четными числами, что невозможно. |

| | |
|---|---|
| **4** | 3. Натуральное число $M$ представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно $N$. Оказалось, что $N$ делится на $M$. Докажите, что если теперь разложить $N$ на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на $N$. |

**Первое решение.** Представим число М в виде произведения упорядоченных по возрастанию простых сомножителей: $M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1 \le p_2 \le p_3 \le \ldots \le p_k$. Покажем, что все простые сомножители равны либо 2, либо 3. Действительно, пусть $p_k$ - самый большой простой делитель (возможно, таких будет несколько), и он больше 3, т.е. это либо 5, либо 7, и т.п., и обязательно нечетный. В числе $N$ он превратится в $p_k + 1 = 2 \cdot q_k$ (и точно также все $p_k$, если их несколько причем, в числе $N$ делителя $p_k$ уже не будет, а значит $N$ не делится на $M$.

Итак, $M = 2^{k_2} \cdot 3^{k_3}$, а $N = (2+1)^{k_2} \cdot (3+1)^{k_3} = 3^{k_2} \cdot 4^{k_3} = 2^{2k_3} \cdot 3^{k_2}$, и поскольку $N$ делится на $M$, то $k_3 \le k_2 \le 2k_3$. (*)

Новое число будет равно $W = (2+1)^{2k_3} \cdot (3+1)^{k_2} = 2^{2k_2} \cdot 3^{2k_3}$, и как видим из (*), степени чисел 2 и 3 удовлетворяют неравенствам $2k_2 \ge 2k_3$, $2k_3 \ge k_2$, т.е. $W$ делится на $N$.

**Второе решение** (Архипов Александр, 9 класс, *для знающих основную теорему арифметики*).
Представим число М в виде произведений степеней различных простых делителей: $M = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$.

Тогда $N = (p_1+1)^{k_1} \cdot (p_2+1)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (p_m+1)^{k_m} =$ (**)

$= p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{n_m} \cdot p_{m+1}^{n_{m+1}} \cdot \ldots \cdot p_e^{n_e}$ (***)

Во выражении (***) учтено, что $N$ делится на $M$ (нацело), т.е. $n_1 \ge k_1, n_2 \ge k_2, \ldots, n_m \ge k_m$, и кроме того в N могут быть и другие простые делители: не только $p_1, p_2, \ldots, p_m$, но некоторые новые, которые мы обозначили через $p_{m+1}, \ldots, p_e$. Проделав такую же операцию над числом $N$ получим новое число:

$$W = (p_1+1)^{n_1} \cdot (p_2+1)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (p_m+1)^{n_m} \cdot (p_{m+1}+1)^{n_{m+1}} \cdot \ldots \cdot (p_e+1)^{n_e}.$$

Сравнивая это представление с представлением (**) и учитывая, что $n_1 \ge k_1, n_2 \ge k_2, \ldots, n_m \ge k_m$, получаем требуемое.

**Третье решение** (Пянко Роман, 9 класс, гимназия 41 г. Минска).

$N$ делится на М, значит $N = K \cdot M$, где $K$ – некоторое натуральное число. Теперь, когда мы у числа $N = K \cdot M$ увеличим все простые делители на 1 (в частности, это означает, что увеличили на 1 все простые делители чисел $K$ и $M$), то вместо $K \cdot M$ получится новое число $L \cdot N$, которое в свою очередь будет делиться на $N$. Доказано.

**5**

4. Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?

Ответ: сын.

**Первое решение.** Сын победит, если разрежет сыр на кусочки 20г, 40г, 80г, 160г. Пусть его мама положила на первую тарелку $n$ масла. Рассмотрим все случаи при $n \le 140$, т.к. для $n \ge 140$ все аналогично, просто тарелки поменяются местами.

При $0 \le n \le 20$. Тогда сын на первую тарелку положит кусочек сыра массой 20г. На второй тарелке тогда будет 280г сыра и 280г масла. Очевидно, что $280 \ge 280 - n$ (т.к. $n \ge 0$) и $20 \ge n$.

При $20 \le n \ge 40$. Тогда сын на первую тарелку положит сыр массой 40г.

Пусть $n = 20 + n_1$. Тогда $0 \le n_1 \le 20$. На второй тарелке окажется 260г сыра и $280 - n = 260 - n_1$ г масла. $260 \ge 260 - n_1$ $(n_1 \ge 0)$ и $40 \ge n$.

При $40 \le n \le 60$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочки сыра массой 20г и 40г. Пусть $n = 40 + n_2$. Тогда $0 \le n_2 \le 20$. На второй тарелке окажется 240г сыра и $280 - n = 240 - n_2$ г масла. $240 \ge 240 - n_2$ $(n_2 \ge 0)$ и $60 \ge n$.

При $60 \le n \le 80$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочки сыра массой 80г. Пусть $n = 60 + n_3$. Тогда $0 \le n_3 \le 20$. На второй тарелке окажется 220г сыра и $280 - n = 220 - n_3$ г масла. $220 \ge 220 - n_3$ $(n_3 \ge 0)$ и $80 \ge n$.

При $80 \le n \le 100$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочки сыра массой 80г и 20г. Пусть $n = 80 + n_4$. Тогда $0 \le n_4 \le 20$. На второй тарелке окажется 200г сыра и $280 - n = 200 - n_4$ г масла. $200 \ge 200 - n_4$ $(n_4 \ge 0)$ и $100 \ge n$.

При $100 \le n \le 120$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочки сыра массой 80г и 40г. Пусть $n = 100 + n_5$. Тогда $0 \le n_5 \le 20$. На второй тарелке окажется 180г. сыра и $280 - n = 180 - n_5$ г масла. $180 \ge 180 - n_5$ $(n_5 \ge 0)$ и $120 \ge n$.

При $120 \le n \le 140$. Тогда сын положит на первую тарелку кусочек сыра массой 80г, 40г и 20г. Пусть $n = 180 + n_6$. Тогда $0 \le n_6 \le 20$. На второй тарелке окажется 160г сыра и $280 - n = 160 - n_6$ г масла $160 \ge 160 - n_6$ $(n_6 \ge 0)$ и $140 \ge n$.

Т.к. при $140 \ge n$ все аналогично, только тарелки поменяются местами, то как бы мама не распределила масло, сын победит.

**Второе решение.** (Взято из решений варианта для 6-7 класса) (см. задачу №4, в которой для удобства вместо 300г сыра взято 15г, а вместо 280г масла взято 14г масла т.е. все значения уменьшены в 20 раз).

Заметим, что 15=1+2+4+8, это наводит на мысль использовать двоичную систему счисления. Сын именно на такие куски порежет сыр. Любое целое число граммов масла, которое мама распределит на одну из тарелок, можно представить в двоичной системе (например, 7=1+2+4) и сразу становится ясно, какие куски сыра нужно использовать сыну для этой тарелки, а оставшийся сыр пойдет на вторую тарелку.

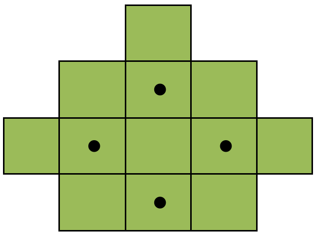
Если же мама на одну из тарелок положит нецелое число граммов масла: $x \in (k; k+1]$, то сын представит в двоичной системе число $(k+1)$, что даст значение для тех кусков сыра, которые он использует для этой тарелки. На вторую тарелку мама тогда положит $y = 14 - x$ граммов масла, $y \in [13-k; 14-k)$, а сын $15-(k+1) = 14-k$ грамм сыра.

**5**

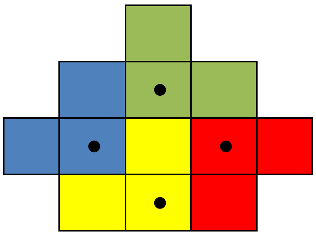
5. Набор состоит из одинаковых трехклеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки?

Ответ: нет, не всегда.

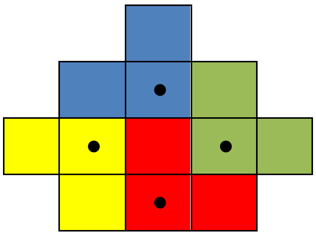
**Решение.** Заметим, что фигуру



можно покрыть двумя разными способами:



или



Тогда доску, приведенную ниже, можно восстановить хотя бы двумя способами: