

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

6-7 классы, базовый вариант, 6 октября 2024 г.

Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.

Баллы за пункты одной задачи суммируются.

Баллы

Задачи

1. Болек и Лелек покрывают клетчатый прямоугольник размером 5×6 клеток фигурками, изображенными на рис. 1 и

Рис.1

Рис. 2

рис. 2, так чтобы фигурки располагались по линиям сетки. Они кладут фигурки по очереди, причем Болек кладет свои фигурки первый и использует четырехклеточные фигурки (тетрамино), а Лелек кладет вторые фигурки (одноклеточные).

1 А) В первый день они действовали дружно и старались полностью покрыть данный прямоугольник. Смогут ли они, действуя сообща, покрыть прямоугольник? (Если да, то покажите как, если нет, то обоснуйте это).

3 Б) На второй день они поссорились, и Лелек сказал, что постарается помешать Болеку в выполнении такой задачи (т.е. в покрытии прямоугольника, при этом кладут свои фигурки они все равно по очереди). Сможет ли Лелек помешать Болеку в покрытии прямоугольника, и если – да, то как?!

4 2. Можно ли разместить в квадрате со стороной 1 метр некоторое количество непересекающихся и не касающихся друг друга кругов так, чтобы сумма их радиусов была равна 2024 метра? Если да, то объясните как, если нет, то докажите это.

1 3. А) В ряд лежат 10 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 5 чёрных камней, а потом 5 белых?

4 Б) Тот же вопрос, если в ряд лежат 20 камней, а после перекрашиваний получится ряд, в котором сначала идут 10 чёрных камней, а потом 10 белых.

6 4. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N . Оказалось, что N делится на M . Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N .

6 5. Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 15 г на 4 куса. Затем мама распределяет 14 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 6 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

1. Дан описанный пятиугольник $ABCDE$. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали AC . Докажите, что
4
$$AB + BC > CD + DE + EA.$$
2. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?
4
3. Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N . Оказалось, что N делится на M . Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N .
4
4. Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?
5
5. Набор состоит из одинаковых трёхклеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки?
5

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 6 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

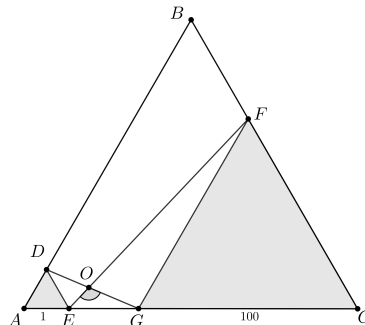
баллы задачи

- 3 1. В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?

- 4 2. У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны 1. У каждого многочлена степень нечётна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого.

- 5 3. В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, — наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными?

- 5 4. В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF , так что образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами 1 и 100 (точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O , причём угол EOG равен 120° . Чему равна сторона треугольника ABC ?



- 5 5. Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней. Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс?