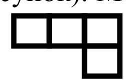
СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, **6-7 классы, Сложный вариант**, 20 октября 2024 г.

- *Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются.*

Баллы	***Задачи***
4	1. Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел, написанных на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?
4	2. Известно, что произведение трех положительных чисел равно единице, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин. Могут ли ровно два числа из этих чисел быть больше единицы? Ответ обоснуйте.
 1 **2** **2**	3. Дана доска $n \times n$ ($n \geq 3$). Изначально все клетки закрашены в белый цвет. За один ход разрешается перекрасить в противоположный цвет (белые – в черный, черные – в белый) любые четыре клетки, расположенные в форме буквы L (см. рисунок). Можно ли такими ходами перекрасить всю доску в черный цвет, если  а) $n = 8$; б) $n = 7$; в) Найдите все значения n, при которых можно перекрасить доску.
7	4. Учитель физкультуры провел турнир по настольному теннису среди 16 учеников своего класса. Турнир проходил по круговой системе в течении 15 уроков, каждый играл с каждым. На каждом уроке каждый ученик играет ровно одну партию. После чего сыгравшие между собой школьники подходят к учителю и сообщают результат учителю физкультуры, а тот ставит победителю десятку. Игорь получил первую десятку только на девятом уроке, и он был девятым школьником, который заслужил хоть одну десятку за теннис. А Олег был двенадцатым учеником, который заслужил хоть одну десятку. На каком уроке по счету Олег получил свою первую десятку за теннис?
9	5. В какое наименьшее число цветов надо покрасить клетки доски 6×10 клеток для того, чтобы у любой клетки было хотя бы две соседние по стороне клетки разного цвета, и две клетки одного цвета никогда не стояли рядом?
9	6. Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?
1 **5** **3** **1**	7. А) Даны 30 гирь массами 1 г, 2 г, 3 г, …, 30 г. Сможете ли вы разложить эти гирьки на три кучки так, чтобы суммарные массы гирек во всех трех кучках были равны. Покажите, как это можно сделать, или докажите, что это невозможно. Теперь Знайка и Незнайка взялись за эту же задачу. При этом Незнайка утверждает, что он может сначала отложить k камней с массой, равной трети от общей массы всех тридцати камней так, что Знайке не получится гарантировано разделить оставшиеся камни на две кучки, и чтобы во всех трех кучках масса камней была одинакова. Прав ли Незнайка, если Б) $k = 16$, В) $k = 17$, Г) $k = 18$?

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

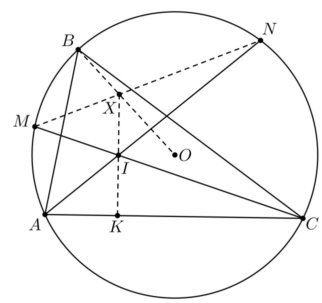
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натурально-
му числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только
4 две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму
чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9.
Могут ли слова барона быть правдой?

2. Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Доро-
га — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться
6 только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может
действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам
от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

3. В остроугольном треугольнике ABC отмечены
точки I и O — центры вписанной и описанной
окружностей соответственно. Прямые AI и CI
7 вторично пересекают описанную окружность тре-
угольника ABC в точках N и M. Отрезки MN и
BO пересекаются в точке X. Докажите, что пря-
мые XI и AC перпендикулярны.



4. У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфе-
ты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и
уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на
число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось — округляем
до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,

5 а) если мешков всего 8;

3 б) если мешков всего 9?

5. На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья
вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примы-
8 кающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь
многоугольник.

6. Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и
на одну по вертикали, *горизонтальными*, а остальные — *вертикальными*. Требу-
10 ется поставить коня на одну из клеток доски 46×46, после чего чередовать им
горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать
клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

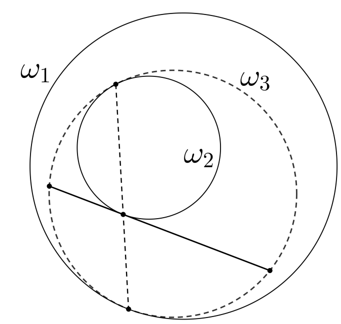
7. Даны две строго возрастающие последовательности положительных чисел, в кото-
рых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно,
10 что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в дру-
гой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть
у этих последовательностей?

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?
6	2. Клетчатую доску 20×20 разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.
7	3. Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?
8	4. Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$, что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство $$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots?$$
10	5. Дана окружность ω_1, а внутри неё — окружность ω_2. Выбирают произвольную окружность ω_3, которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3. Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности. 
12	6. Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов. Число m назовём *волшебным числом замка*, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)
14	7. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.)