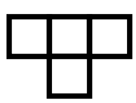
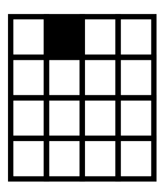
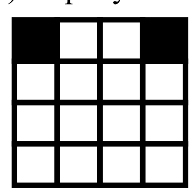
СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, **6-7 классы, Базовый вариант**, 2 марта 2025 г.

- *Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются.*

| ***Баллы*** | ***Задачи*** |
|---|---|
| **4** | 1. На доску записали числа 1, 2, . . . , 100. Далее за ход стирают любые два числа и записывают вместо них одно число, равное неполному частному от деления большего числа на меньшее. Если два числа равны, то вместо них записывают 1. После 99 ходов на доске останется одно число. Найдите наибольшее и наименьшее число, которые могут остаться после таких операций. |
| **3** | 2. Разрежьте тремя прямолинейными разрезами прямоугольник 27×75 на несколько меньших прямоугольников и из них сложите квадрат. (Стороны разрезанных прямоугольников выражаются целыми числами, и все части должны быть использованы.) |
| **4**<br>**2** | 3. А) В классе 25 учеников. Среди них образовалось несколько компаний. Один ученик может входить в несколько компаний. *Общительностью* школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна 1). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе.<br>Б) А если в классе 24 ученика? |
| **2**<br>**4** | 4. Дан квадрат 4 × 4. Изначально все клетки белые. За один ход можно перекрасить в противоположный цвет 4 клетки, образующие букву «Т» (см. рис. 1; белые клетки перекрашиваются в черный цвет, черные в белый). Можно ли за несколько таких перекрашиваний получить квадрат, изображенный<br>А) на рисунке 2; Б) на рисунке 3?<br><br>***Рис. 1***<br><br>***Рис. 2***<br><br>***Рис. 3*** |
| **6** | 5. В турнире по настольному теннису каждый участник сыграл с каждым другим участником ровно один раз. Правшей, игравших на турнире, было в два раза больше, чем левшей, однако количество игр, выигранных левшами, было на 40% больше, чем количество игр, выигранных правшами. Ничьих в теннисе не бывает, заболевших игроков тоже не было. Сколько игр правши выиграли у левшей? |

**СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

Весенний тур,

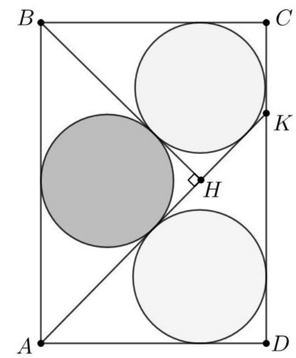
8 – 9 классы, базовый вариант, 2 марта 2025 г.

баллы задачи

4 1. На доску записали числа 1, 2, ..., 100. Далее за ход стирают любые два числа $a$ и $b$, где $a \geqslant b > 0$, и пишут вместо них одно число $[a/b]$. После 99 ходов на доске останется одно число. Каким наибольшим оно может быть? (Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее $x$.)

5 2. В классе $N$ школьников, среди них образовалось несколько компаний. *Общительностью* школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна 1). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе?

5 3. На стороне $CD$ прямоугольника $ABCD$ взята точка $K$. Из вершины $B$ опустили перпендикуляр $BH$ на отрезок $AK$. Оказалось, что отрезки $AK$ и $BH$ делят прямоугольник на три части, в каждую из которых можно вписать круг (см. рисунок). Докажите, что если круги, касающиеся стороны $CD$, равны, то и третий круг им равен.




6 4. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

6 5. Прямоугольная клетчатая доска покрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета и разбита на доминошки $1 \times 2$. Везде, где граничат по стороне горизонтальная и вертикальная доминошки, стоит дверка. Она покрашена в тот же цвет, что и примыкающая клетка той доминошки, которая примыкает короткой стороной. Обязательно ли белых дверок столько же, сколько чёрных?

**СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 2 марта 2025 г.

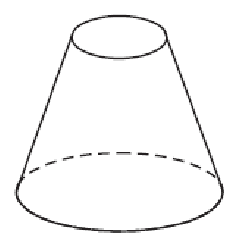
баллы задачи

4 1. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся четыре различных натуральных делителя с суммой 2025.

4 2. На плоскости провели 100 прямых, среди них никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники, все стороны которых лежат на этих прямых (в том числе четырёхугольники, внутри которых проведены линии). Обязательно ли выпуклых среди них столько же, сколько невыпуклых?

5 3. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

5 4. На плоскости стояло ведро, верхнее основание больше нижнего. Ведро перевернули. Докажите, что площадь его видимой тени уменьшилась. (Ведро — это прямой круговой усечённый конус: его основания — два круга, лежащие в параллельных плоскостях, центры кругов лежат на прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Видимая тень — это вся тень, кроме тени под ведром. Солнечные лучи считайте параллельными. )



6 5. Дан многочлен с целыми коэффициентами, имеющий хотя бы один целый корень. Наибольший общий делитель всех его целых корней равен 1. Докажите, что если старший коэффициент многочлена равен 1, то наибольший общий делитель остальных коэффициентов тоже равен 1.