СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, **6-7 классы, Сложный вариант, 16 марта 2025 г.**

- *Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются.*

Баллы	*Задачи*
4	1. Во время шахматного турнира два участника, сыграв одинаковое число партий заболели и выбыли из турнира, а остальные участники доиграли турнир до конца. Сыграли ли выбывшие участники между собой, если всего на турнире было сыграно 23 партии (с учетом партий выбывших; турнир проводится по круговой системе, т.е. каждый с каждым играет ровно одну партию)? Ответ объясните.
5	2. Дан 12-угольник, все стороны которого равны между собой и все углы которого равны между собой. Сколько треугольников можно построить, используя вершины этого 12-угольника, причем такие, чтобы никакие стороны треугольников не совпадали со сторонами многоугольника? Свой ответ обоснуйте.
2	3. А) Петя выбрал трехзначное число N, записал его цифры в обратном порядке и сложил полученное число с исходным числом N. В сумме получилось число 1151. Сколько разных значений могло принимать исходное число N?
4	Б) Петя выбрал два трехзначных числа M и N, записал цифры обоих чисел в обратном порядке и сложил все четыре полученных числа. В сумме получилось число 3534. Сколько разных пар чисел (M, N) мог Петя выбрать изначально? (Пары считаются упорядоченными, т.е. (1, 2) и (2, 1) – это две разные пары.)
2	4. а) В ряд выложены 50 монет, ровно 17 из них фальшивые. Известно, что все фальшивые монеты лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, и фальшивые монеты весят одинаково, но фальшивые монеты весят меньше, чем настоящие. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь вычислить хотя бы одну фальшивую монету?
5	б) В ряд выложены 50 монет, ровно 10 из них фальшивые. Известно, что все фальшивые монеты лежат подряд. Настоящие монеты весят одинаково, и фальшивые монеты весят одинаково, но фальшивые монеты весят меньше, чем настоящие. Можно ли за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь вычислить все фальшивые монеты?
10	5. Имеется возрастающая последовательность натуральных чисел. Любое натуральное число, которого нет в этой последовательности, является суммой каких-то двух членов этой последовательности. Докажите, что на n-ом месте в этой последовательности стоит число не большее, чем n^2?
10	6. Сумма всех делителей натурального числа – простое число. Докажите, что тогда и их количество – простое число.
12	7. Автобусная остановка имеет расписание. Каждый автобус впервые приходит в какой-то день x, а далее каждый d-ый день, то есть он приедет в дни x, $x + d$, $x + 2d$, … . Число d называется частотой автобуса. Максимальное ожидание остановки – это наибольшее количество подряд идущих дней без автобуса. Администрация города, которая устанавливает расписание, хочет сделать максимальное ожидание как можно меньше. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2024$, если частоты автобусов равны 2^{2024}, 2^{2025}, …, 2^n (на каждую частоту ровно один автобус), то администрация города не сможет сделать максимальное ожидание меньше, чем 2^{2023}.

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.

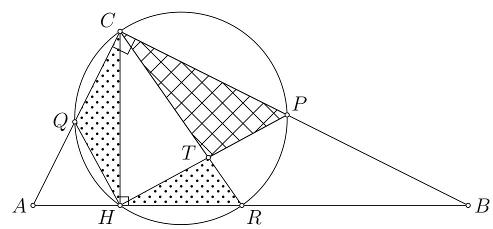
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7 семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?

5 2. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать количество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?

5 3. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. Некоторая окружность, проходящая через точки C и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T. Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?



4. Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если

3 а) $N = 50$;

5 б) $N = 25$?

8 5. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две – по 2 г, три – по 3 г, четыре – по 4 г, пять – по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с указанием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно?
(Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)

6. Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники — прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные — равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны 30° все углы

4 а) у белых треугольников;

5 б) у чёрных треугольников?

7. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котятам поровну мяса, если всего котят

3 а) двое;

7 б) трое?

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

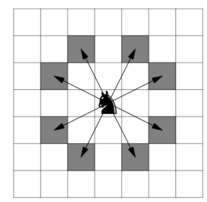
5 1. Существует ли такое положительное число $x > 1$, что

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \ldots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x.)

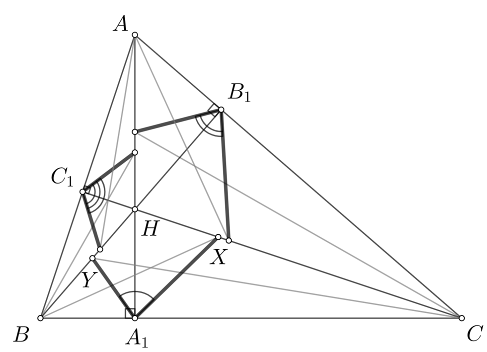
6 2. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Оказалось, что рёбра SA, SB, SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR, ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.

7 3. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других? (Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)



8 4. В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?

10 5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.



10 6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k. Не ошибается ли барон?

12 7. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)