СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур **6-7 классы, базовый вариант**, 5 октября 2025 г.

- *Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются.*

1. Завод игрушек изготовил партию головоломок с набором карточек, стороны которых окрашены в разные цвета. Незнайка утверждает, что в инструкции к головоломкам указано: каждый набор содержит три комплекта: в одном из комплектов стороны карточек окрашены в красный и желтый цвет, во втором – в красный и зеленый, в третьем – в зеленый и желтый. При этом карточек, у которых одна сторона красная ровно 675, у которых одна сторона зеленая – ровно 680, и карточек, у которых ровно одна сторона желтая – ровно 670. Не ошибается ли Незнайка? (*максимум 4 балла*)

Ответ: Незнайка ошибается.

Первое решение основано на принципе четности. Просуммируем данные по условию количества сторон окрашенных в одинаковый цвет: 680+675+670=2025 – это нечетное число. Но при этом каждая карточка посчитана дважды, т. е. сумма должна быть четной. Противоречие.

Второе решение. Исходя из данных в условии чисел (количеств) можно попробовать определить количество карточек каждого типа: пусть красно-желтых карточек – x, красно-зеленых – y, желто-зеленых – z. Тогда число количество красных сторон равно $x + y = 675$, количество зеленых равно $y + z = 680$, а количество желтых сторон равно $x + z = 670$. Складывая подученные равенства получаем: $2x + 2y + 2z = 2025$. Но слева в этом равенстве четное число, а справа – нечетное, противоречие.

2. Директор, проживающий в пригороде Минска, каждый день приезжает электричкой на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов утра к вокзалу подъезжает машина и отвозит директора в школу. Однажды директор приехал на вокзал в 7 часов утра и пошел в школу пешком навстречу машине. Встретив ее, он сел в нее и приехал в школу на 30 минут раньше обычного. Сколько было времени в момент встречи директора и машины в этот раз? (*максимум 4 балла*)

Ответ: в 7 часов 45 минут.

Решение. Машина была в пути на 30 минут меньше чем обычно за счёт того, что она не доехала до вокзала. За эти 30 сэкономленных минут она обычно должна была доехать до вокзала и вернуться к тому же месту встречи. В один конец это занимает 15 минут, значит машина встретилась с директором за 15 минут до обычного времени встречи, то есть за 15 минут до 8 часов. Иначе говоря в 7 часов 45 минут.

3. В классе каждый ребёнок говорит правду только в определённые дни недели, причём никто не говорит правду два дня подряд. Первого, второго, третьего и четвёртого апреля у каждого ребёнка в классе спросили, будет ли он завтра говорить правду. Первого апреля «да» ответили все дети в классе, второго – половина, третьего – треть. Какая часть класса сказала правду четвёртого апреля? (*максимум 5 баллов*)

Ответ: 1/6 часть скажет правду

Первое решение. Сразу отметим такое важное утверждение: если в какой-то день ребёнок отвечает “Да” (помним, что вопрос всегда один и тот же), то он и сейчас лжёт и завтра будет лгать (ибо если его “Да” – правда, то он завтра должен говорить правду, а по условию задачи это невозможно). Обозначим это утверждение (*). В то же время, если ребёнок говорит “Нет”, то если сейчас его “правдивый” день, то он будет завтра лгать, а если он сейчас лжёт, то завтра будет говорить правду (**). Исходя из этих утверждений построим следующую схему.

<table>
<tr><td>1-й день – 1 апреля</td><td colspan="3">все 100% детей сказали “Да” и солгали,
т.е. все завтра будут лгать</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2-й день – 2 апреля</td><td colspan="2">В этой колонке стоит та половина детей (т.е. 50%), которая сегодня сказала “Да”, но сегодня они лгут, поэтому</td><td>В этой колонке стоит та половина детей (еще 50%), которые сегодня сказали “Нет”, но сегодня они лгут</td></tr>
<tr><td colspan="2">завтра тоже будут лгать</td><td>поэтому завтра скажут правду</td></tr>
<tr><td></td><td>↓</td><td>↓</td><td>↓ ↓</td></tr>
<tr><td>3-й день – 3 апреля</td><td>Именно в этой ПОДКОЛОНКЕ стоит та 1/3 детей, которые согласно условию сказали “Да”, и эта треть солжет, и завтра они будут лгать</td><td>Здесь оставшаяся часть – 1/6 часть детей первой половины, которые сказали “Нет”, и они завтра скажут правду</td><td>эти 50% сегодня говорят правду, поэтому не могут сказать “Да”, т.е они скажут “Нет” и завтра реально солгут</td></tr>
<tr><td></td><td>↓</td><td>↓</td><td>↓ ↓</td></tr>
<tr><td>4-й день – 4 апреля</td><td>Сегодня в 4-й день эта 1/3 детей лгут</td><td>Сегодня в 4-й день именно эта 1/6 часть детей говорит правду</td><td>Сегодня в 4-й день
Эта половина (эти 50%) все лгут</td></tr>
</table>

Второе решение (по сути то жее самое, но кратко (из Москвы). 1 апреля все солгали (никто не говорит правду два дня подряд). Значит, и 2 апреля все солгали. Половина из них ответила «нет», все они 3 апреля сказали правду, поэтому 4 апреля они лгали, а 3 апреля тоже сказали «нет». Вторая половина ответила «да», все они 3 апреля лгали, но треть из них ($^1/_6$ от общего числа) 3 апреля сказали «нет», поэтому 4 апреля они сказали правду. Остальные 3 апреля сказали «да», т.е. 4 апреля они лгали.

4. На репетицию новогоднего хоровода пришли 10 мальчиков. По сценарию в хороводе мальчики и девочки должны стоять по кругу, причем так, чтобы рядом с каждым мальчиком стояли мальчик и девочка, и через одного от каждой девочки тоже стояли мальчик и девочка. Сколько девочек должны участвовать в хороводе? (Укажите все возможные варианты и покажите, что других быть не может.) (*максимум 5 баллов*)

Ответ: 20 девочек.

Решение. Посмотрим на одного из мальчиков По условию рядом с ним стоят мальчик и девочка. С точностью до симметрии можно изобразить это так: М М Д. Через одного от девочки стоят мальчик и девочка. Для отмеченной нами девочки мальчик уже стоит, следовательно, с другой стороны стоит девочка. Отметим знаком _ танцора пол, которого мы ещё не определили, тогда схема выглядит так: М М Д _ Д. Вместо _ можно поставить только девочку, так как рядом с этим местом стоят две девочки и условие для мальчика не будет выполнено. Для этой девочки одно место через одного уже занято мальчиком, следовательно, второе должна занять девочка. Получили такую схему: М М Д Д Д Д. Теперь для третьей и четвертой девочки в одну сторону через одного от них стоят девочки, следовательно в другую должны стоять мальчики: М М Д Д Д Д М М. Справа от последнего мальчика должна стоять девочка, и мы можем повторить те же рассуждения, которые привели нас к четырём девочкам и двум мальчикам. Таким образом, по кругу должны чередоваться группы из двух мальчиков и четырех девочек. По условию мальчиков всего 10, следовательно, таких групп 5, следовательно, девочек должно быть 20. Таким образом учитель может пригласить только ровно 20 девочек.

5. В ряд слева направо стоят коробки с номерами 1, 2, 3, ... В них по очереди кладут числа 1, 2, ..., 1000. В каждой коробке каждые два числа должны быть взаимно просты. Очередное число кладётся в самую левую из разрешённых коробок. Все числа разложили по коробкам.

а) Какие числа попали во вторую коробку? (*максимум 3 балла*)

б) Сколько чисел попало в третью коробку? Ответ объясните. (*максимум 3 балла*)

Ответ: а) во второй коробке квадраты простых чисел, не превосходящих 31,

б) в третьей коробке будет 5 чисел.

Решение. Для того, чтобы увидеть закономерности, начнём раскладывать числа по порядку (по очереди) 1, 2, 3, 4, 5, 6, … в разрешённые коробки в соответствии с указанными правилами (см. таблицу)

Коробки	**Числа**
1:	1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
2:	4, 9, 25, 49, $121=11^2$, $169=13^2$, …
3:	$2\cdot3=6$; $5\cdot7=35$; $11\cdot13=143$, …
4:	8, 15, …
5:	10, 21, …
6:	12, …
7:	14, 27, …
8:	16, …
9:	18, …
10:	20, …

Замечаем: 1) в первую коробку попадают единица и все простые числа (любое составное число имеет общий делитель с некоторым простым, меньшим его).

2) все чётные числа $2k$ будут попадать в соответствующую k-ую коробку.

3) во вторую коробку попадут квадраты всех простых чисел: 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, … ибо любое другое составное число будет иметь среди своих простых делителей такое, которое уже содержится в этой коробке, в соответствующем точном квадрате (а именно меньшее из простых чисел в его разложении на простые сомножители).

4) В третью коробку будут попадать по порядку взятые попарные произведения простых чисел:

$$2\cdot3=6;\ 5\cdot7=35;\ 11\cdot13=143;\ 17\cdot19=323 \text{ и т. д.}$$

Действительно, в этом случае в третьей коробке будут присутствовать все простые числа (*как сомножители в соответствующих произведениях*), а любое другое − отличное от указанных составных чисел $n=p_1\cdot p_2\cdot$ … (здесь стоит произведение двух или большего числа простых чисел p_j) будет иметь общий простой делитель с каким-то из предыдущих и, следовательно, должно попасть в одну из следующих коробок.

Из этих рассуждений получаем ответ: во вторую коробку попадут квадраты простых чисел: 4, 9, 25, 49, $121=11^2$, $169=13^2$, $289=17^2$, $361=19^2$, $529=23^2$, $841=29^2$, $961=31^2$.

В 3-ей коробке будут числа: $2\cdot3=6$; $5\cdot7=35$; $11\cdot13=143$; $17\cdot19=323$; $23\cdot29=667$, т. е., всего 5 чисел.