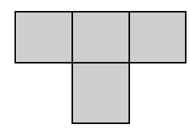
СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ **ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ**

Осенний тур, **6-7 классы, СЛОЖНЫЙ вариант**, 19 октября 2025 г.

- *Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются.*

Баллы	Задачи
2 3	1. В 12-значном числе А любые две соседние цифры образуют двузначное простое число, причём все эти 11 простых чисел различны. а) Приведите пример такого числа А. б) На какую цифру может оканчиваться число А? Укажите все варианты, и объясните, почему других быть не может. **Ответ: а) см. в решении; б) на цифру 9**. **Решение.** а) Ответ: например, число 417971137319 б) Двузначные простые числа не могут оканчиваться на 2, 4, 5, 6 или 8. Поэтому простое число, начинающееся с такой цифры, может стоять только в начале числа А. Остальных простых двузначных чисел (начинающихся на 1, 3, 7 или 9) только 10 — это 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79 и 97, тогда все они должны быть использованы. При этом на 9 начинается только 97, а оканчиваются на 9 два числа — 19 и 79, поэтому одно из чисел 19, 79 стоит в конце числа А..
5	2. В клетках таблицы 12 на 40 клеток расставили натуральные числа так, что сумма всех чисел внутри любой фигурки, изображенной на рисунке, равна 24. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице? (Фигурку можно как угодно поворачивать. Укажите все возможные варианты и покажите, что других быть не может.)  **Ответ: 2880.** **Решение.** Таблицу 12×40 легко разрезать на 30 квадратиков 4×4, а каждый такой квадратик на 4 непересекающихся ***тетрамино***. Тогда в каждом маленьком квадрате сумма чисел равна 96, а общая сумма равна 96×30 = 2880.
7	3. Является ли целым число (30!) **:** (10! + 20!) ? (Указание: $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, т.е. это произведение всех подряд идущих натуральных чисел от 1 до n.) **Ответ: нет, не является.** **Решение:** Сократим дробь на 10! В знаменателе останется число 11 × 12 × … × 20 + 1. Это число не делится на числа от 11 до 20, а также на числа от 2 до 10. Следовательно, если бы исходное число было целым, то число 11 × 12 × … × 20 + 1 сократилось бы с числами от 21 до 30. Но общих множителей с составными числами оно иметь не может, так как они все меньше 20. Следовательно, если можно на какие-то числа сократить, то это числа 23 и 29. Но число 11 × 12 × … × 20 + 1 много больше чем 23 × 29, следовательно, число 30!/(10!+20!) не является целым.
2 4 2	4. По кругу сидят n детей, у каждого есть несколько конфет. У каждого из них спросили: “Сколько всего конфет у тебя и двух твоих соседей, вместе взятых?”. Можно ли гарантированно по ответам детей однозначно восстановить, у кого из них сколько конфет, если а) $n = 2024$; б) $n = 2025$; в) $n = 2026$? Примечание. Все дети говорят правду. **Ответ: а) да; б) нет; в) да.** **Решение.** а) Количество всех конфет у детей есть сумма их ответов, деленная на 3. Сложим ответы детей № 2, № 5, № 8, …, № 2024. Очевидно, сумма их ответов есть число всех конфет у детей + число конфет у ребенка № 1. Таким образом, мы узнаем число конфет у ребенка № 1. б) Предположим, что мы восстановили количество конфет у каждого из детей. Добавим по одной конфете каждому ребенку с номером вида 3k+1 и заберем по конфете у каждого ребенка с номером 3k+2. в) Количество всех конфет у детей есть сумма их ответов, деленная на 3. Сложим ответы детей № 2, № 5, № 8, …, № 2024. Очевидно, сумма их ответов есть число всех конфет у детей – число конфет у ребенка № 2026. Таким образом, мы узнаем число конфет у ребенка № 2026.

8	5. Барон Мюнгхаузен утверждает, что в день его рождения собралась компания, в которой у каждого ее члена ровно 6 друзей, а у любых двух – ровно два общих друга. Прав ли барон Мюнгхаузен? (Естественно, барон входит в эту компанию.) **Ответ: Можно.** **Решение.** Пример для компании из 16 человек 1 дружит с 2,4,5,6,13,16; 2 дружит с 1,3,5,6,14,15; 3 дружит с 2,4,7,8,14,15; 4 дружит с 1,3,7,8,13,16; 5 дружит с 1,2,6,8,9,12; 6 дружит с 1,2,5,7,10,11; 7 дружит с 3,4,6,8,10,11; 8 дружит с 3,4,5,7,9,12; 9 дружит с 5,8,10,12,13,14; 10 дружит с 6,7,9,11,13,14; 11 дружит с 6,7,10,12,15,16; 12 дружит с 5,8,9,11,15,16; 13 дружит с 1,4,9,10,14,16; 14 дружит с 2,3,9,10,13,15; 15 дружит с 2,3,11,12,145,16; 16 дружит с 1,4,11,12,13,15; Аналогично можно построить примеры и для компаний другой численности.
    3 2 6	6. У Паши и Миши есть квадратная таблица 10×10, в каждой клетке которой стоит либо плюс, либо минус. Паша и Миша по очереди вычёркивают: Паша — ещё не вычеркнутую строку, а Миша — ещё не вычеркнутый столбец, пока не останется всего одна невычеркнутая клетка. Если в ней стоит плюс, то выиграл Паша, а если минус — Миша. А) Могла ли таблица оказаться такой, что в этой игре, кто бы её ни начинал — Паша или Миша, — способ гарантировать себе победу имеется у того, кто ходит вторым? Б) Какое наименьшее число плюсов (для выигрыша Паши) или минусов (для выигрыша Миши) может быть в такой таблице? В) Тот же вопрос, что и в пункте А), но для игрока, который ходит первым. **Ответ: а) да; б) 10; в) нет.** **Решение.** Решение пунктов А) и В) см. в решениях задач 8-9 класса – решение задачи № 3. Пункт Б) следует из принципа Дирихле, поскольку количество строчек (и соответственно столбцов) в таблице 10, и в каждой строчке (столбце) должно быть по крайней мере по одному соответствующему знаку (плюсу или минусу), чтобы соперник не мог их всех вычеркнуть.
     4 8	7. На столе по кругу лежат N внешне одинаковых монет весами 1, 2, ..., N граммов. Известно, что веса идут по порядку, но неизвестно, по часовой стрелке или против, и с какого места начинаются. Одним взвешиванием разрешается сравнить любые две монеты и узнать, какая тяжелее. Барон Мюнхгаузен утверждает, что можно сделать k взвешиваний так, чтобы после этого гарантированно определить вес хотя бы одной монеты. А) Прав ли барон Мюнхгаузен, если $N = 6$, а $k = 4$? Б) Прав ли барон Мюнхгаузен, если $N = 9$, а $k = 3$? **Ответ: а) да; б) нет.** **Решение.** а) Пусть a, b, c, d, e, f – шесть монет, расположенных по кругу. Сравниваем такие пары монет (через одну): b и d, d и f, f и b. Имея результаты этих взвешиваний, однозначно определяем, по или против часовой стрелки располагаются. Затем берем минимальную из них и последним взвешиванием узнаем: она минимальная или соседняя с ней, а, значит, знаем вес по крайней мере одной монеты (на самом деле в этом пункте знаем веса всех монет). б) (Главная Идея и грубая оценка!) Допустим, что такой алгоритм есть при некотором монет N, и за k взвешиваний можно вычислить какую-то монетку. Тогда, после всех взвешиваний, монетки могут быть расположены не более чем двумя способами, и, произведя ещё одно взвешивание, мы узнаем полностью конфигурацию. Но всего разных конфигураций $2N$, а возможных результатов последовательности из k+1 взвешивания не более 2k+1. Итак, $2N \le 2^{k+1}$ и $N \le 2^k$. Т.е. при $k = 3$ получим $N \le 8$.