# СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЕСЕННЕГО ТУРА

**Базовый вариант, 8 – 9 классы**

**1 (4 балла).** *Коля выписал на доске число* $111\dots111$ *(60 единиц). Оля выбрала какие-то* 30 *подряд стоящих единиц и заменила каждую из них на восьмёрку. Докажите, что полученное* 60*-значное число делится на* $999\dots999$ *(30 девяток).*

*(Михаил Мурашкин)*

**Решение 1.** Разобьём наше 60-значное число на два тридцатизначных числа $A$ и $B$, записанных подряд. Заметим, что если на каком-то месте в числе $A$ стоит 1, то на таком же месте в числе $B$ стоит 8, и наоборот. Поэтому сумма $A+B$ равна $\underbrace{9\dots9}_{30}$. Осталось заметить, что наше число равно

$$A\cdot 10^{30}+B = A\cdot(\underbrace{9\dots9}_{30}+1)+B = A\cdot\underbrace{9\dots9}_{30}+(A+B) = (A+1)\cdot\underbrace{9\dots9}_{30}.$$

**Решение 2.** Заметим, что $1\dots1\underbrace{8\dots8}_{30}1\dots1 = \underbrace{1\dots1}_{60}+\underbrace{7\dots7}_{30}0\dots0 = \underbrace{1\dots1}_{30}\cdot(10^{30}+1+70\dots0)$. Независимо от количества нулей сумма цифр второго множителя равна 9. Значит, наше число делится на $\underbrace{1\dots1}_{30}\cdot 9$.

**2 (4 балла).** *Учитель дал 30 ученикам тест из 10 вопросов, в котором на каждый вопрос есть ровно один правильный ответ. Каждый ученик на пять вопросов ответил правильно, а в пяти ошибся. Оказалось, что никакие два неправильных ответа учеников на один и тот же вопрос не совпали. Какое наименьшее число работ необходимо посмотреть, чтобы мы гарантированно смогли выбрать 5 вопросов и указать правильный ответ к каждому из них?*

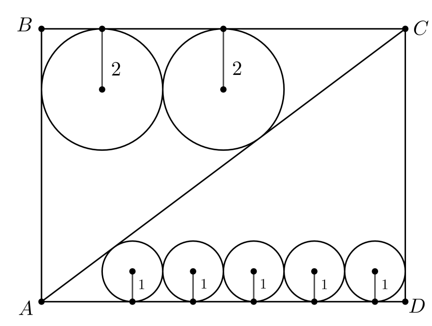
*(Татьяна Казицына)*

**Ответ:** 7 работ.

Приведём пример, когда посмотреть 6 работ недостаточно: если в этих работах на первые 4 вопроса все ответили правильно, а на каждый из остальных 6 вопросов было получено по одному правильному ответу.

Докажем, что посмотреть 7 работ всегда будет достаточно. Предположим противное — пусть, проверив 7 работ, мы узнали меньше пяти правильных ответов. Тогда есть не меньше 6 вопросов, ответы на которые не повторяются, то есть на каждый из них дано не больше одного правильного ответа. На каждый из остальных 4 вопросов дано не больше 7 правильных ответов (сколько всего работ), поэтому общее число правильных ответов не превышает $4\cdot7+1\cdot6=34$. Но по условию в 7 работах их $7\cdot5=35$ — противоречие.

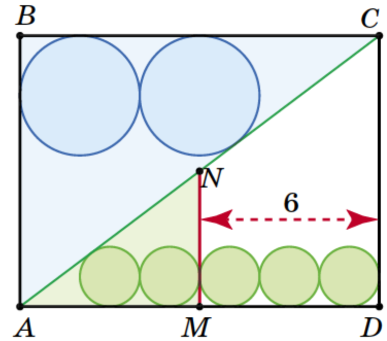
**3 (5 баллов).** *В прямоугольнике* $ABCD$ *расположены 7 кругов. Два круга радиуса 2 касаются друг друга и стороны* $BC$*, причём один из них касается ещё и стороны* $AB$*, а другой — диагонали* $AC$*. Остальные 5 кругов имеют радиус 1 и все касаются стороны* $AD$*, образуя цепочку: соседние круги касаются друг друга, причём один из крайних кругов цепочки касается ещё и стороны* $CD$*, а другой — диагонали* $AC$*. Найдите длины сторон прямоугольника* $ABCD$*.*



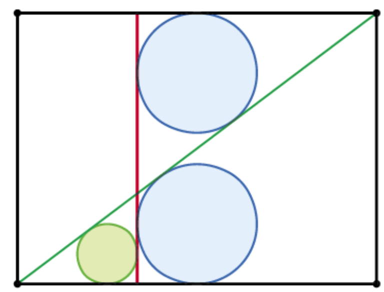

*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** 12 и 9.

Проведём общую касательную ко второму и третьему малым кругам (считая слева) до пересечения с диагональю. Получим треугольник $ANM$, подобный треугольнику $ABC$, причём в них «одинаково» вписаны две окружности, только радиусы окружностей отличаются в два раза. Значит, $ANM$ подобен $ABC$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому $M$ — середина $AD$, и так как $MD = 6$, то $AD = 12$.




Проведя слева вертикальную касательную к большой окружности, мы увидим внизу прямоугольный треугольник с горизонтальным катетом длины 4 и вписанной окружностью радиуса 1. Такой треугольник единственный (мы располагаем окружность радиуса 1 внутри прямого угла, касающуюся его сторон, откладываем на одной из сторон угла расстояние 4 от вершины и проводим из полученной точки касательную к кругу, продолжая до пересечения со второй стороной прямого угла в однозначно определённой точке), но треугольник со сторонами 3, 4, 5 подходит — значит, это он и есть. Тогда его вертикальный катет равен 3, и так как треугольник подобен $ACD$ с коэффицентом $\frac{1}{3}$, то $CD = 9$.



**4.** *В каждой клетке доски $N \times N$ стоит по шкатулке. В одной из них лежит приз. Пустая шкатулка весит 100 граммов, а вес шкатулки с призом равен суммарному весу всех шкатулок в соседних с ней по стороне клетках. У ведущего есть двухчашечные весы без гирь, на каждую чашу помещается сколько угодно шкатулок. За одну попытку можно указать ведущему, какие шкатулки положить на какую чашу (а какие не взвешивать), и он сообщит результат: будут ли весы в равновесии, а если нет — какая чаша перевесит. За какое наименьшее количество попыток можно гарантированно узнать, сколько весит приз, если* **а) (2 балла)** $N = 4$; **б) (3 балла)** $N = 7$?
*(Узнавать, в какой именно шкатулке лежит приз, не требуется.)*

*(Михаил Евдокимов, Александр Грибалко)*

**Ответ:** за одну попытку в каждом из пунктов.

а) На левую чашу положим 4 центральные шкатулки, на правую — 4 угловые. Если перевесит левая чаша, приз на ней и весит 300 г; если правая — приз на ней и весит 100 г; если весы в равновесии, приз остался на доске и весит 200 г.

б) На левую чашу положим 25 внутренних шкатулок, на правую — 24 оставшиеся. Если приз во внутренней шкатулке, то левая чаша перевесит (и приз весит 300 г); если в угловой, то будет равновесие (и приз весит 100 г); если в «боковой», то правая чаша перевесит (и приз весит 200 г).

**Замечание.** При любом $N \geqslant 3$, кроме $N = 5$, можно узнать, сколько весит приз, всего за одну попытку (докажите это!), и только для $N = 5$ нужны две попытки.

**5 (5 баллов).** *На спортивном параде выстроились по кругу 2026 спортсменов, занумерованных подряд числами от 1 до 2026 по часовой стрелке. Каждый спортсмен смотрел на соседа справа или соседа слева. Известно, что было ровно 100 пар соседей, смотрящих друг на друга. Затем каждый спортсмен с чётным номером повернулся и смотрит уже на другого соседа. Сколько теперь имеется пар соседей, смотрящих друг на друга?*

*(Людмила Смирнова)*

**Ответ:** 913 пар.

Пусть смотрящие по часовой стрелке – Ч, а смотрящие против часовой стрелки – П. Друг на друга смотрят только соседи в неоднородной паре (ПЧ или ЧП); причём при движении по кругу после любой пары ПЧ следующая неоднородная – ЧП и наоборот, то есть пар ПЧ и ЧП поровну.

Очевидно, что при движении по кругу пары ЧП и ПЧ чередуются. По условию пар ЧП 100, значит, и пар ПЧ тоже 100, а однородных пар (ПП и ЧЧ) суммарно 1826. В каждой из пар повернётся ровно один спортсмен, однородные пары станут неоднородными и наоборот. После поворота пары ЧП и ПЧ также чередуются, поэтому новых пар ЧП ровно половина: $1826 : 2 = 913$.

## Базовый вариант, 10 – 11 классы

**1 (4 балла).** *Можно ли из последовательности точных квадратов* $1, 4, 9, 16, \ldots$ *выбрать такую бесконечную подпоследовательность, что разность любых двух её соседних членов — точный куб?*

*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** можно. Достаточно взять последовательность чисел вида $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ при натуральных $n$, поскольку

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3.$$

**2 (4 балла).** *Через вершину правильного тетраэдра проведена плоскость, касающаяся его вписанной сферы и отсекающая от противоположной грани треугольник. Докажите, что периметр этого треугольника не зависит от выбора плоскости.*

*(Михаил Евдокимов)*

Касательные, проведенные из вершины к вписанной сфере, образуют конус, пересекающий основание по вписанной окружности. Значит, плоскость из условия пересекает плоскость основания по касательной к этой вписанной окружности. Нетрудно заметить, что периметр отсечённого этой касательной треугольника равен удвоенному расстоянию от вершины до точки касания, то есть равен стороне основания.

**3 (4 балла).** *На спортивном параде выстроились по кругу 2026 спортсменов, занумерованных подряд числами от 1 до 2026 по часовой стрелке. Каждый спортсмен смотрел на соседа справа или соседа слева. Известно, что было ровно 100 пар соседей, смотрящих друг на друга. Затем каждый спортсмен с чётным номером повернулся и смотрит уже на другого соседа. Сколько теперь имеется пар соседей, смотрящих друг на друга?*

*(Людмила Смирнова)*

**Ответ:** 913 пар.

Пусть смотрящие по часовой стрелке – Ч, а смотрящие против часовой стрелки – П. Друг на друга смотрят только соседи в неоднородной паре (ПЧ или ЧП); причём при движении по кругу после любой пары ПЧ следующая неоднородная – ЧП и наоборот, то есть пар ПЧ и ЧП поровну.

Очевидно, что при движении по кругу пары ЧП и ПЧ чередуются. По условию пар ЧП 100, значит, и пар ПЧ тоже 100, а однородных пар (ПП и ЧЧ) суммарно 1826. В каждой из пар повернётся ровно один спортсмен, однородные пары станут неоднородными и наоборот. После поворота пары ЧП и ПЧ также чередуются, поэтому новых пар ЧП ровно половина: $1826 : 2 = 913$.

**4 (5 баллов).** *Дан многочлен*

$$*x^n + *x^{n-1} + \ldots + *x + *,$$

*вместо каждого из $n+1$ его коэффициентов записана звёздочка. Играют двое, ходят по очереди, за ход выбирают любую звёздочку и заменяют её на любое целое ненулевое число. Когда звёздочек не останется, игрок, сделавший последний ход, выиграет, если у получившегося многочлена есть целый корень, иначе выиграет другой игрок. При каждом натуральном $n$ выясните, кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник.*

*(Александр Романов)*

**Ответ:** при любом $n$ игрок, делающий последний ход, имеет выигрышную стратегию.

**Решение.** Разберём два случая.

1) $n$ нечётно. Тогда последний ход делает второй игрок. Его стратегия: после хода первого игрока заменять любую из оставшихся звёздочек на противоположное число. При этом после каждого хода второго, в том числе и в конце, сумма $S$ проставленных коэффициентов равна 0. В итоге получится многочлен $f(x)$, для которого $f(1) = S = 0$, то есть он имеет целый корень 1.

2) $n$ чётно. Тогда последний ход делает первый игрок. Докажем, что он может действовать так, чтобы своим последним ходом получить многочлен, имеющий корнем число 1 или $-1$.

Для этого сначала выясним, что могло бы помешать первому сделать выигрышный последний ход, если все коэффициенты, кроме последнего, уже проставлены. Пусть $S_Ч$ и $S_H$ — суммы проставленных коэффициентов при чётных и нечётных степенях соответственно. Чтобы получить корень 1, надо поставить такой коэффициент, чтобы сумма всех коэффициентов равнялась 0, а чтобы получить корень $-1$, надо поставить такой коэффициент, чтобы знакопеременная сумма всех коэффициентов равнялась 0. Если оба варианта невозможны для первого, он в каждом из случаев должен последним ходом поставить 0. Но тогда имеем: $S_Ч + S_H = 0$ и $S_Ч - S_H = 0$, откуда $S_Ч = S_H = 0$. Значит, первый сможет обеспечить себе возможность последнего выигрышного хода, если добьётся того, что хотя бы одна из итоговых сумм $S_Ч$, $S_H$ не будет равна нулю.

Так как общее число коэффициентов нечётно, то и количество коэффициентов при степенях одной какой-то чётности нечётно, назовём соответствующие коэффициенты красными, а остальные — синими. Пусть первый сначала заменит один из красных коэффициентов на 1, а далее каждый раз заменяет числом коэффициент того же цвета, что и только что заменил второй. Когда первый игрок впервые будет заменять последний коэффициент одного из цветов, он должен выбрать такое число, чтобы сумма коэффициентов этого цвета оказалась ненулевой. Тогда финальным ходом он сможет выбрать ненулевое число так, чтобы обнулить либо $S_Ч + S_H$, либо $S_Ч - S_H$, то есть число 1 или $-1$ будет корнем итогового многочлена.

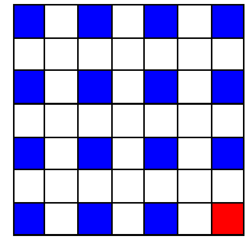
**5).** *Квадрат $N \times N$ разбит на $N^2$ единичных квадратов. Одна из вершин единичных квадратов радиоактивна. Имеется также прибор, который про любой из этих единичных квадратов определяет, есть ли среди его вершин радиоактивная. Найдите радиоактивную вершину за наименьшее число проверок, если а) (2 балла) $N = 7$; б) (3 балла) $N = 8$.*

*(Рустэм Женодаров)*

**а) Ответ:** достаточно 17 проверок.

*Оценка.* Вначале имеются 64 подозрительные вершины. Если первые 15 проверок дали отрицательный результат (это возможно), осталось не менее $64 - 15 \cdot 4 = 4$ подозрительных вершин. Если при 16-й проверке используется квадрат, содержащий не менее двух подозрительных вершин, то при положительном результате этой проверки все они останутся подозрительными. Если же используется квадрат с одной подозрительной вершиной, то при отрицательном результате ещё не менее трёх вершин останутся подозрительными. Значит, 16-ти проверок недостаточно.

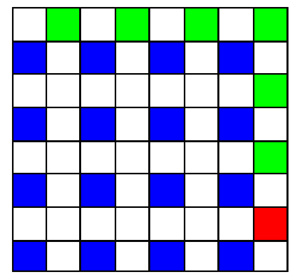
*Алгоритм.* Последовательно проверяем 15 синих квадратов (см. рисунок справа). Если одна из проверок даст положительный результат, подозрительными останутся 4 вершины соответствующего квадрата. В следующей проверке используем квадрат, содержащий ровно две из них (при любом исходе останутся две подозрительные вершины), а далее — квадрат, содержащий ровно одну подозрительную вершину.



Если же 15 проверок дадут отрицательный результат, подозрительными остаются только 4 вершины красного квадрата. Аналогично за две оставшиеся проверки находим радиоактивную вершину.

**б) Ответ:** достаточно 24 проверок.

*Оценка.* Разобьём квадрат $8 \times 8$ на квадраты $2 \times 2$ и рассмотрим 25 узлов сетки — вершины этих квадратов. Каждый отрицательный результат проверки освобождает от подозрения не более одного из этих узлов. Поэтому после 23 проверок найдутся два подозрительных узла. Значит, 23 проверок недостаточно.



*Алгоритм.* Последовательно проверяем 16 синих квадратов (см. рисунок справа), затем 6 зелёных. Если хотя бы один результат положителен, то радиоактивная вершина находится за две дополнительные проверки. Если все 22 проверки дают отрицательный результат, проверяем красный квадрат. При положительном результате подозрительными остаются только две его правые вершины (две левые проверены ранее), и одной проверки хватит, чтобы определить радиоактивную.

При отрицательном результате подозрительными остаются только левый верхний и правый нижний углы исходного квадрата. И в этом случае хватит одной дополнительной проверки.

### Сложный вариант, 8 – 9 классы

**1 (4 балла).** *Несколько человек участвовало в школьных соревнованиях по трём видам спорта: плавание, гонки на велосипеде и бег. Кроме обычного зачёта по каждому виду спорта присуждались дополнительные награды в трёх номинациях:*

- *«Лучший пловец среди пяти лучших велосипедистов»;*
- *«Лучший велосипедист среди пяти лучших бегунов»;*
- *«Лучший бегун среди пяти лучших пловцов».*

*Кирилл хвастается, что завоевал все три дополнительные награды, хотя ни по одному виду спорта не вошёл в тройку лучших. Какое наименьшее количество человек могло участвовать в соревнованиях?*

*(Иван Русских)*

**а) Ответ:** 10 человек.

*Оценка.* Для каждого вида спорта есть по три человека, выступивших лучше Кирилла. Среди этих девяти человек нет совпадающих: например, тройка лучших по плаванию отстала от Кирилла в беге, поэтому не пересекается с тройкой лучших в беге.

*Пример.* Результаты в порядке убывания: по плаванию — А, Б, В, К, Г, Д, Е, Ж, З, И; по велосипеду — Г, Д, Е, К, Ж, З, И, А, Б, В; по бегу — Ж, З, И, К, А, Б, В, Г, Д, Е (где К — Кирилл).

**2 (6 баллов).** *Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами $a$, $b$ и $c$, имеющее целый корень. Может ли оказаться, что, какой бы из этих трёх коэффициентов ни увеличить на 1, снова получится квадратное уравнение, имеющее целый корень?*

*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** может. Например, квадратный трёхчлен $2x^2 - 5x + 2$ имеет корень 2, а при увеличении любого коэффициента на 1 этот трёхчлен останется квадратным и будет иметь корень 1, поскольку сумма коэффициентов станет нулевой.

**3 (6 баллов).** *Имеется 11 арбузов массами 1, 2, 3, …, 11 кг. Оля и Коля раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большей массы рвётся. Они по очереди выбирают любой арбуз и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Оля. Кто может гарантировать себе победу, как бы ни играл другой?*

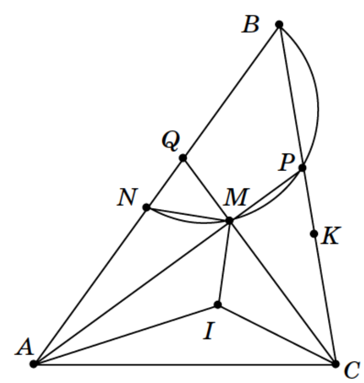
*(Людмила Смирнова)*

**а) Ответ:** Оля. Пусть она сначала положит арбуз массой 1 кг в любой пакет, а остальные арбузы распределит в пары массой по 13 кг. Какой бы арбуз ни положил Коля в очередной пакет, она положит туда же парный арбуз. Этот пакет выдержит ещё не более 1 кг, значит, в него больше класть нечего. Так будет разложено 9 арбузов, и Коля проиграет.

**4 (7 баллов).** *На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ с углом $B$, равным $45^\circ$, выбрали соответственно точки $Q$ и $P$ так, что угол $BAP$ в три раза меньше угла $A$, а угол $BCQ$ в три раза меньше угла $C$. Пусть $M$ — точка пересечения отрезков $AP$ и $CQ$. Описанные окружности треугольников $BPM$ и $BQM$ повторно пересекают стороны $AB$ и $BC$ в точках $N$ и $K$ соответственно. Докажите, что из отрезков $AN$, $AC$ и $CK$ можно сложить треугольник, и найдите наибольший угол этого треугольника.*

*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** $135^\circ$.




Пусть $\angle A = 3\alpha, \angle C = 3\gamma$. Тогда $\alpha + \gamma = (180^\circ - 45^\circ) : 3 = 45^\circ$. Значит, треугольник $AMC$ прямоугольный. Пусть $I$ — точка пересечения его биссектрис. Поскольку четырёхугольник $BPMN$ вписан, $\angle NMA = \angle B = 45^\circ = \angle AMI$. Следовательно, треугольники $ANM$ и $AIM$ равны по общей стороне и двум углам, откуда $AN = AI$. Аналогично $CK = CI$, то есть $AIC$ — искомый треугольник, а $\angle AIC = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 135^\circ$.

**Вариация.** В треугольнике $ABC$ сумма углов $A$ и $C$ равна $135^\circ$. Две трети от этого — $90^\circ$ — сумма углов при вершинах $A$ и $C$ в треугольнике $AMC$, а треть — $45^\circ$ — сумма углов при вершинах $A$ и $C$ в $AIC$, где $I$ — точка пересечения биссектрис $AMC$.

Так как четырёхугольник $BPMN$ вписан, то $\angle AMN = \angle ABP = 45^\circ = \angle AMC/2$. Поэтому при симметрии относительно $AM$ лучи $AN$ и $MN$ переходят в биссектрисы треугольника $AMC$. Значит, $AN = AI$. Аналогично $CK = CI$. Следовательно, из $AN$, $AC$ и $CK$ складывается треугольник $AIC$ с углом $I$, равным $135^\circ$.

**Замечание.** Попутно мы доказали, что $M$ — середина $NK$.

**5 (8 баллов).** *Существует ли такое бесконечное множество $S$ натуральных чисел, что для любых двух различных $x$ и $y$ из $S$ найдётся $z$ из $S$ (не обязательно отличное от $x$ и $y$), для которого $x^2 + y^2 + z^2$ будет точным квадратом?*

*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** существует.

Возьмём в качестве $S$ множество степеней двойки (с неотрицательными целыми показателями). Если $x < y$ — степени двойки, то $z = \frac{y^2}{2x}$ — тоже степень двойки из $S$, причём

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2xz + z^2 = (x + z)^2.$$

**6.**

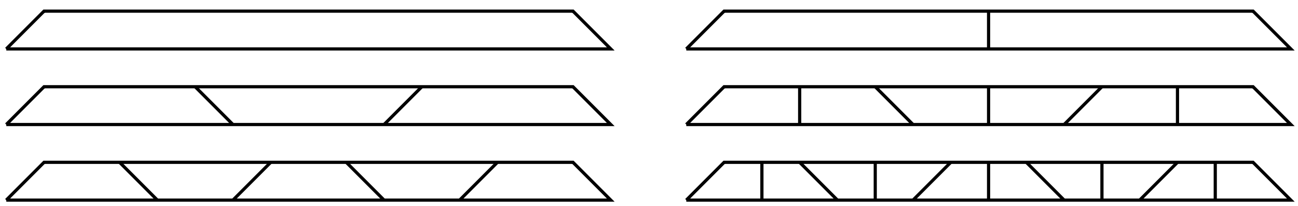
**а) (5 баллов)** *Существует ли отличный от параллелограмма выпуклый четырёхугольник, который можно разрезать на любое количество равных выпуклых четырёхугольников от 2 до 100?*

**б) (5 баллов)** *Существует ли выпуклый четырёхугольник, не имеющий ни центра, ни оси симметрии, который можно разрезать как на 2, так и на 47 равных выпуклых четырёхугольников?*

*(Алексей Заславский)*

**Ответ:** существует.

**а)** Поясним сначала идею решения. Вот пример равнобокой трапеции (с основаниями 14 и 16), которую можно разрезать на некоторые нечётные (слева) и соответствующие чётные (справа) количества равных трапеций:



Но как поделить такую трапецию на 4 равные трапеции, 8 равных? Оказывается, тоже можно, разбив её сначала на несколько параллелограммов и трапецию, а эти фигуры — на равные части:

Для нашей задачи надо лишь подобрать соотношение оснований исходной трапеции так, чтобы получились все необходимые разрезания.

Если мы хотим разрезать равнобокую трапецию с основаниями $a < b$ на $2n + 1$ трапеций с основаниями $x$ и $x + (b - a)$ (как было в наших примерах), достаточно, чтобы для основания длины $a$ выполнялось равенство $(n + 1)x + n(x + b - a) = a$, откуда $x(2n + 1) = a(n + 1) - bn$. Подходящее $x$ найдётся при $\frac{a}{b} > \frac{n}{n+1}$. Так как последовательность $\frac{n}{n+1}$ возрастает с ростом $n$, для наших целей достаточно, чтобы $\frac{a}{b} > \frac{99}{100}$.

А для разрезания на $2k$ трапеций с основаниями $y$ и $y + \frac{b-a}{2}$ (как в наших примерах), достаточно, чтобы для основания длины $a$ выполнялось равенство $(k+1)y+(k-1)(y+\frac{b-a}{2}) = a$, откуда $4ky = 2a - (k - 1)(b - a) = a(k + 1) - b(k - 1)$. Подходящее $y$ найдётся при $\frac{a}{b} > \frac{k-1}{k+1}$, и снова для наших целей достаточно, чтобы $\frac{a}{b} > \frac{99}{101}$.

В итоге подойдёт, например, равнобокая трапеция, длины оснований которой — 100 и 101.

**б)** Возможно, самое трудное в этой задаче — придумать четырёхугольник без центра и оси симметрии, который можно разрезать на два равных четырёхугольника. Для этого рассмотрим квадрат и проведём через его центр $O$ любую прямую $l$, делящую квадрат на две прямоугольные трапеции. Любая такая трапеция подойдёт, так как проходящая через $O$ прямая $s$, перпендикулярная $l$, разрежет обе трапеции на равные части (поскольку вместе прямые $l$ и $s$ делят квадрат на 4 равные части, которые совмещаются поворотами на $90^\circ$ вокруг $O$); и такая трапеция не имеет ни оси, ни центра симметрии.

Эту трапецию можно разрезать и на 47 равных прямоугольных трапеций подобно тому, как это сделано в пункте а), подобрав подходящее соотношение оснований. Например, подойдёт прямоугольная трапеция $ABCD$ с высотой $AB = 141$ и основаниями $BC = 70$ и $AD = 71$.

Действительно, рассмотрим в этой трапеции внутренний прямоугольник $ABXY$, у которого ширина $BX = AY = 69$; он разрезается на 23 прямоугольника ширины 3, каждый из которых разрезается на две трапеции с основаниями 1 и 2, равных трапеции $YXCD$. Получили разбиение на 47 равных трапеций.

**7 (12 баллов).** *В каждой клетке одной из главных диагоналей доски* $90 \times 90$ *стоит конь. За какое наименьшее число ходов кони могут занять все клетки другой главной диагонали?*

*(Александр Грибалко)*

**Ответ:** за 2026 ходов.

**Решение 1.**

*Пример.* Пусть кони стояли на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний.

За 1 вертикальный ход и 44 горизонтальных конь может перейти из левого верхнего угла в правый верхний (и аналогично из правого нижнего в левый нижний); так переведём двух угловых коней.

За 43 горизонтальных хода конь может перейти на доске $88 \times 88$ из угла в клетку, соседнюю (по диагонали) с другим углом; так мы переведём пару соседних коней на одном конце диагонали новой доски на два соответствующих соседних места другой диагонали, аналогично с парой на другом конце.

Аналогично за 41 ход можно перевести коня на доске $84 \times 84$ из угла в клетку, соседнюю (по диагонали) с другим углом, и так далее.

Всего получается $2 \cdot 45 + 4(43 + 41 + \ldots + 1) = 2 \cdot 45 + 44^2 = 45^2 + 1 = 2026$ ходов.

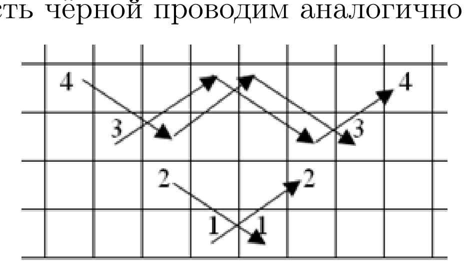
*Оценка.* Занумеруем клетки одной диагонали от 45 до 1, считая от центра, а другой — от 46 до 90. Пусть конь с клетки $x \leqslant 45$ занял клетку $y > 45$. Число $y - x$ равно модулю разности номеров строк или столбцов, поэтому конь сделал не менее $(y-x)/2$ ходов. Значит, всего ходов не менее $(46 + \ldots + 90) - (1 + \ldots + 45) = 45^2$. Так как главная и побочная диагонали разных цветов, то каждый конь сделал нечётное число ходов. Поэтому общее число ходов чётно и оно не меньше $45^2 + 1$.

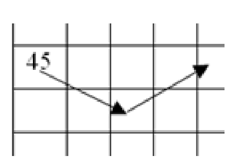
**Решение 2.**

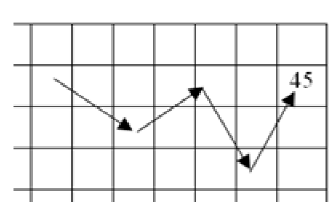
Пусть кони стояли на белой диагонали (идущей из левого верхнего угла). Она разбивается на две части — верхнюю и нижнюю. Обозначим клетки верхней части $Б_1$, $Б_2$, …, $Б_{45}$, начиная от центра, клетки нижней — так же. Аналогично обозначим клетки черной диагонали: $Ч_{45}$, …, $Ч_1$, $Ч_1$, …, $Ч_{45}$.

*Оценка.* Заметим, что коню для перехода с клетки $Б_i$ на клетку $Ч_j$ потребуется не менее $\frac{1}{2}(i + j - 1)$ ходов. Действительно, если обе клетки лежат в верхней части доски, то он должен сдвинуться на $i + j - 1$ клетку вправо, а каждый ход сдвигает его не более чем на 2 клетки. Если $Б_i$ в верхней части, а $Ч_j$ в нижней, он должен сдвинуться на $i + j - 1$ клетку вниз; и т.д. Просуммировав эти оценки по всем 90 коням, получим удвоенную сумму чисел от 1 до 45 минус 45, т.е. $45 \cdot 46 - 45 = 452 = 2025$. Поскольку кони переходили с чёрных клеток на белые, каждый из 90 коней сделал нечётное число ходов, а в сумме они сделали чётное число ходов, то есть не меньше 2026.

*Пример.* Покажем, как переставить коней с верхней части белой диагонали на верхнюю часть чёрной за 1013 ходов. При $n$ от 1 до 22 переставим коня с клетки $Б_{2n}$ на $Ч_{2n-1}$, а с $Б_{2n-1}$ — на $Ч_{2n}$, сдвигаясь каждым ходом на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз (рис. слева). Потребуется $2n - 1$ ход. Для перехода с $Б_{45}$ на $Ч_{45}$ потребуется 45 ходов (рис справа). Итого 1013 ходов. Перестановку коней с нижней части белой диагонали на нижнюю часть чёрной проводим аналогично.

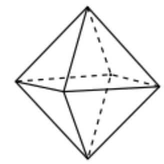


**Сложный вариант, 10 – 11 классы**

**1 (4 балла).** *Каждую грань правильного октаэдра (см. рисунок) разбили средними линиями на правильные треугольники (всего получилось 32 одинаковых маленьких правильных треугольника). Какое наибольшее число этих треугольников можно закрасить так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих вершин?*



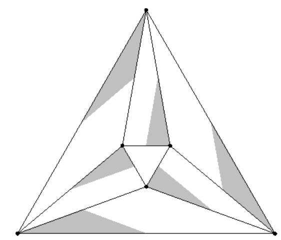
*(Михаил Евдокимов)*

**Ответ:** 6 треугольников.

**Решение.**

*Оценка.* Множество вершин треугольников состоит из 18 точек: 6 вершин октаэдра и 12 середин его рёбер. Поэтому больше $18:3 = 6$ треугольников закрасить нельзя.

*Пример.* На «развертке» октаэдра закрашено 6 треугольников.



**2 (5 баллов).** *Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Ведущий разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит — игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего ведущий незаметно для игрока выбирает по шарику из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, игрок получит приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы ведущий ни менял шарики?*

*(Николай Чернятьев)*

**Ответ:** может.

**Решение 1.** Пусть всего цветов $n \geqslant 2$, и есть $n$ коробок и $2n$ шариков (по 2 каждого цвета), разложенные в эти коробки. Докажем утверждение индукцией по $n$.

Когда коробочек две, в них обеих либо разноцветные шарики (и задача решена), или в обеих одноцветные, и тогда, указав на них, мы за один ход получаем требуемое.

Докажем переход индукции (когда коробочек больше двух). Отложим одну коробочку, сделаем индукционную проверку остальных. Если в отложенной коробочке были разноцветные шарики, скажем красный и синий, отождествим мысленно красный и синий цвета, тогда для оставшихся коробок по индукции был момент, когда во всех них шарики разноцветные, в этот момент и у нас везде разноцветные шарики. Иначе была отложена «одноцветная» коробочка, тогда после окончания проверки сделаем одну операцию с отложенной коробочкой и какой-то ещё, теперь отложенная точно «разноцветная», и снова по индукции проверим остальные

**Вариация.** Пусть цветов сколько угодно, но каждого цвета *не больше* двух шариков, и есть $n$ пар коробок (по два шарика в каждой). Докажем индукцией по $n$, что хватит $2^n - 1$ ходов, чтобы когда-нибудь все коробки стали разноцветными.

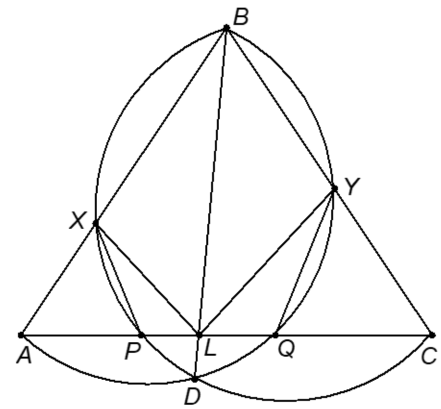
Если пара коробок одна, то или до хода, или после обе коробочки разноцветные (так как если есть одноцветная коробочка, в ней лежат все шарики данного цвета, и, поменяв один из них на шарик из другой коробочки, получим везде разные цвета). Хватает одного хода.

Пусть пар $n > 1$. Отложив в сторону одну пару, делаем с оставшимися коробками $2^{n-1} - 1$ ходов, как умеем по предположению индукции. Затем делаем ход в отложенной паре и снова $2^{n-1} - 1$ ходов в остальных парах. В какой-то момент за эти $2^n - 1$ ходов все коробки были разноцветными.

**3 (6 баллов).** *В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны $AB$ и $BC$ равны, $L$ — точка пересечения его диагоналей. Описанная окружность треугольника $ABD$ пересекает сторону $BC$ в точке $Y$, а описанная окружность треугольника $BCD$ пересекает сторону $AB$ в точке $X$. Докажите, что углы $XLA$ и $YLC$ равны.*

*(Фёдор Нилов)*

**Решение 1.** Пусть прямая $AC$ пересекает окружность $(CXB)$ в точке $P$. Тогда $\angle AXP = \angle C = \angle A$. Поэтому $AP = XP$. Аналогично для точки $Q$ пересечения $AC$ с окружностью $(AYB)$ имеем равенство $CQ = YQ$, причём $\angle XPL = \angle A + \angle C = \angle YQL$.




Прямая $BD$ — радикальная ось рассматриваемых окружностей. Значит, $AL{\cdot}QL = CL{\cdot}PL$. Вычитая $QL{\cdot}PL$, получим $AP \cdot QL = CQ \cdot PL$. Поэтому

$$\frac{PL}{QL} = \frac{AP}{CQ} = \frac{XP}{YQ}.$$

Тогда треугольники $XPL$ и $YQL$ подобны и $\angle XLP = \angle YLQ$.

**Замечания.** 1) Можно было действовать и в обратную сторону: выбрать точку $L'$ на $AC$ с нужным равенством углов (такая ровно одна), из подобия треугольников вычислить степени $L'$ и выяснить, что она должна лежать на радикальной оси.

2) Точка $D$ — точка Микеля для прямых $AB$, $AY$, $CB$, $CX$.

**Решение 2.** Из вписанности четырёхугольника $DXBC$ получаем $\angle AXD = \angle BCD = \angle YCD$. Аналогично $\angle CYD = \angle XAD$. Значит, треугольники $AXD$ и $YCD$ подобны, откуда

$$\frac{AX}{YC} = \frac{AD}{YD} = \frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBY} = \frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC}.$$

Но и

$$\frac{AL}{CL} = \frac{S_{ABL}}{S_{BCL}} = \frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle DBC}.$$

Поскольку $\angle XAL = \angle BAC = \angle ACB = \angle LCY$, треугольники $AXL$ и $CYL$ подобны, откуда углы $XLA$ и $YLC$ равны, что и требовалось.

**4 (9 баллов).** *Назовём набор из $k$ последовательных натуральных чисел* неудачным, *если невозможно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы среди выбранных делителей не было одинаковых. При каждом ли натуральном $k$ количество неудачных наборов из $k$ последовательных натуральных чисел конечно?*

*(Юрий Богомолов, Александр Тертерян)*

**Ответ:** при каждом.

Для $k = 1$ плохой набор ровно один и состоит из числа 1. Далее пусть $k > 1$. Пусть $P$ — произведение всех простых, меньших $k$; докажем, что все наборы, в которых первое число $N$ больше $P^k$, уже не будут неудачными (тем самым, количество неудачных наборов конечно).

Если у числа из нашего набора есть простой делитель $p$, не меньший $k$, просто берём этот делитель — среди $k$ подряд идущих чисел нет двух, кратных $p$.

Осталось разобраться с «плохими» числами, все простые делители которых меньше $k$. У «плохого числа» выберем тот простой делитель, который в него входит в максимальной степени, эта степень больше $k$, поскольку $N > P^k$.

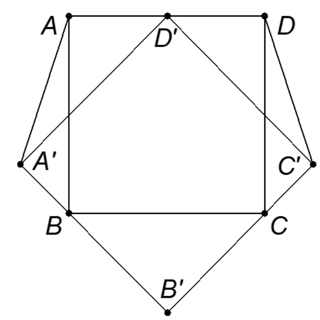
Если у двух «плохих» чисел выбран один и тот же простой делитель $p$, то так как оба делятся на $p^{k+1}$, разность между ними тоже не меньше $p^{k+1}$, что невозможно, так как $p^{k+1} > k$.

**5 (10 баллов).** *Существует ли выпуклый пятиугольник со свойством: для каждой точки на его границе найдётся квадрат, вписанный в пятиугольник, и такой, что выбранная точка является одной из вершин квадрата? (Квадрат считается вписанным, если все его вершины лежат на границе пятиугольника.)*

*(Егор Морозов)*

**Ответ:** существует.

Пусть $D'$ — середина $AD$ квадрата $ABCD$. Параллельно его диагоналям опишем вокруг $BCD'$ прямоугольник $A'B'C'D'$ (см. рисунок справа). Он симметричен относительно $B'D'$, значит, является квадратом. Докажем, что подойдёт выпуклая оболочка этих квадратов — пятиугольник $DAA'B'C'$.




Векторы $AA'$ и $BB'$ различны, поэтому существует (единственная) поворотная гомотетия, переводящая $A$ в $A'$ и $B$ в $B'$. Ясно, что она переводит квадрат $ABCD$ в $A'B'C'D'$, поскольку они одинаково ориентированы.

Возьмём на отрезке $AA'$ точку $A_1$. Рассмотрим поворотную гомотетию с тем же центром, но переводящую $A$ в $A_1$. Она переведёт $B$, $C$, $D$ соответственно в точки $B_1$, $C_1$, $D_1$, делящие отрезки $BB'$, $CC'$, $DD'$ в том же отношении, что и $A_1$ делит $AA'$. Получится квадрат $A_1B_1C_1D_1$, вписанный в пятиугольник. Для другой половины границы пятиугольника вписанные квадраты строятся симметрично $B'D'$.

**6 (10 баллов).** *На клетчатой доске $2n\times 2n$ расставлены $2n$ ладей ($n$ — натуральное число). Докажите, что можно выбрать либо $n$ горизонталей, либо $n$ вертикалей и снять все ладьи с выбранных $n$ рядов так, что оставшиеся ладьи не будут бить друг друга.*

*(Виталий Грибенник, Михаил Савватеев)*

**Решение 1.** Построим граф на ладьях как вершинах, причём соединим рёбрами ладьи, бьющие друг друга. Будем перечислять столбцы и строки, в которых стоят ладьи. Для этого рассмотрим одну из компонент графа, выберем в ней одну из ладей и зафиксируем номер её столбца и номер её строки. Если в компоненте есть другие ладьи, то рассмотрим ладью, которая бьёт выбранную. Если она стоит в том же столбце, то добавим номер её строки, а если в той же строке, то добавим номер её столбца. Затем выберем ладью, которая бьёт одну из уже выбранных, и т.д. На каждом шаге добавляется либо номер столбца, либо номер строки, либо ничего. Таким образом мы переберём все ладьи данной компоненты, и в списке окажется столбцов и строк вместе на 1 больше, чем ладей в компоненте (так как для первой ладьи мы указали и столбец, и строку).

Проделав то же самое для каждой компоненты, получим список из $2n+c$ столбцов и строк, где $c$ — количество компонент. Теперь забудем временно в каждой компоненте про последнюю выбранную ладью. Количество компонент не увеличится. Аналогично сказанному выше получим, что новый граф содержит суммарно не больше $(2n-c)+c=2n$ столбцов и строк. Без ограничения общности среди них не больше $n$ столбцов. Если их вычеркнуть, то могут остаться лишь некоторые временно забытые ладьи. Они не бьют друг друга, так как принадлежат разным компонентам.

**Решение 2.** Если в каком-то столбце стоит больше двух ладей, поставим красную точку в каждой его клетке, где стоит ладья, за исключением двух. Аналогично если в какой-то строке стоит больше двух ладей, поставим синюю точку в каждой её клетке, где стоит ладья, за исключением двух. Без ограничения общности, пусть красных точек не меньше, чем синих.

Назовём столбец *пустым*, если в нём нет ладей, и *плотным*, если в нём более одной ладьи. Из равенства количества ладей и количества столбцов получаем, что разность между количеством пустых и плотных столбцов равна количеству красных точек.

Среди столбцов с одной ладьёй выберем максимальное подмножество, в котором все ладьи стоят в разных строках. Эти столбцы назовём *удачными*, а остальные столбцы с одной ладьёй *неудачными*. В неудачном столбце ладья стоит в той же строке, что и в каком-то удачном. Без ограничения общности считаем, что в этой строке синяя точка отсутствует в удачном столбце и в одном из неудачных. Тогда разность между количеством неудачных и удачных столбцов не больше количества синих точек. Поэтому она не больше разности между количеством пустых и плотных столбцов. Значит, пустых и удачных столбцов вместе не меньше, чем плотных и неудачных, т.е. не меньше $n$. Пустые и удачные столбцы образуют искомое подмножество.

**Решение 3.** Предположим противное: для некоторой расстановки ладей это невозможно. Назовём ряд (строку, столбец) *густым*, если в нём не менее двух ладей, иначе — *редким*. Назовём густой ряд *сильным*, если в нём не менее двух ладей на пересечении с редкими рядами, иначе — *слабым*. Пусть есть $v$ сильных столбцов и $v'$ слабых, $h$ сильных строк и $h'$ слабых. Пусть на пересечении сильных столбцов с редкими строками стоит $k$ ладей, на пересечении сильных строк с редкими столбцами — $m$ ладей, а в объединении слабых строк и слабых столбцов — $c$ ладей. Все эти ладьи различны, поэтому $k + m + c \leqslant 2n$. В слабых столбцах не менее $2v'$ ладей, откуда $c \geqslant 2v'$. Аналогично $c \geqslant 2h'$. Из последних двух неравенств следует, что $c \geqslant v' + h'$.

Отметим ладьи: на пересечении редких рядов, на пересечении слабых строк с редкими столбцами, в каждой сильной строке одну ладью на пересечении с каким-нибудь редким столбцом. Отмеченные ладьи не бьют друг друга. Остальные ладьи стоят в непустых столбцах без отмеченных ладей: $v+v'$ густых столбцов и $m-h$ редких. По предположению $v+v'+m-h > n$. Аналогично $h + h' + k - v > n$. Сложив эти два неравенства, получим $h' + v' + k + m > 2n$. Итак, $2n \geqslant k + m + c \geqslant k + m + v' + h' > 2n$. Противоречие.

**Решение 4.** Рассмотрим двудольный граф, вершины которого — строки (одна доля) и столбцы (вторая доля), а рёбрами соединены строка и столбец, если на их пересечении стоит ладья. Выберем наименьшее количество строк и столбцов, покрывающих все ладьи — пусть это будут $a$ строк и $b$ столбцов. Тогда по теореме Кёнига (число рёбер в наибольшем паросочетании двудольного графа равно числу вершин в его наименьшем вершинном покрытии) существуют $a + b$ ладей, не бьющих друг друга, назовём их *особыми*. Из этих ладей не больше $a$ стоят в выбранных строках и не больше $b$ в выбранных столбцах — значит, поскольку особых ладей $a+b$, ровно $a$ в строках и ровно $b$ в столбцах, и эти множества из $a$ и $b$ ладей не пересекаются.

Заметим, что выполняется хотя бы одно из условий:

(1) в $a$ выбранных строках не больше $n + a - b$ ладей *вне выбранных столбцов*;

(2) в $b$ выбранных столбцах не больше $n + b - a$ ладей *вне выбранных строк*;

— иначе всего ладей больше, чем $2n$.

Без ограничения общности, пусть верно (1). Тогда можно выбросить $b$ выбранных столбцов и выбросить оставшиеся неособые ладьи: все они в выбранных строках, и их не более $n - b$, причём мы тратим максимум по столбцу на каждую, так что всего мы потратим не более $b + (n - b) = n$ столбцов. После этого останутся только особые ладьи, то есть они не бьют друг друга.

**7 (12 баллов).** *Петя загадал многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. За один ход Вася может назвать любой многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, а в ответ Петя должен сообщить*

- *достигается ли максимальное значение $P + Q$, и если да, то чему оно равно;*
- *достигается ли минимальное значение $P + Q$, и если да, то чему оно равно.*

*Докажите, что Вася может последовательно задавать вопросы так, чтобы в какой-то момент он перестал их задавать и назвал такое число $t$, что $|P(2026) - t| < 10^{-100}$.*

*(Леонид Шатунов)*

**Решение 1.** Сдвинув графики многочленов на 2026 влево, заменим задачу на эквивалентную: будем искать приближение числа $P(0)$. Методом проб находим $n$, при котором у функции $P(x)+x^{2n}$ есть минимальное, а у функции $P(x)-x^{2n}$ — максимальное значение. Этого не произойдёт, пока $2n<\deg P$, обязательно произойдёт, когда $2n$ станет больше $\deg P$, но может произойти и при $2n=\deg P$. Чтобы обеспечить неравенство $2n>\deg P$, увеличим найденное $n$ на 1. При этом же (увеличенном) $n$ и любом натуральном $C$ функция $P(x)-Cx^{2n}$ будет иметь максимальное значение $M_C$, а функция $P(x)+Cx^{2n}$ — минимальное значение $m_C$. При этом

$$M_C \geqslant P(0) \geqslant m_C.$$

Как известно, $M_C$ — значение функции $P(x)-Cx^{2n}$ в одном из корней $x_C$ производной

$$(P(x)-Cx^{2n})' = P'(x) - 2nCx^{2n-1},$$

то есть

$$\frac{P'(x_C)}{x_C^{2n-1}} = 2nC \quad \text{или} \quad x_C = 0.$$

Функция $\dfrac{P'(x)}{x^{2n-1}}$ стремится к нулю при $x\to+\infty$, значит, для всякого натурального $k$ она ограничена при $|x|\geqslant \frac{1}{k}$. Следовательно, для данного $k$ имеем: $|x_C|<\frac{1}{k}$ при достаточно большом $C$. Так как $k$ можно выбрать произвольным, получаем, что $x_C\to 0$ при $C\to+\infty$. Отсюда следует, что

$$Cx_C^{2n} = \frac{x_C}{2n}P'(x_C) \to 0 \quad \text{и} \quad M_C = P(x_C) - Cx_C^{2n} \to 0 \quad \text{при} \quad C\to+\infty.$$

Аналогично $m_C\to 0$ при $C\to+\infty$.

Таким образом, Вася, называя многочлены $\pm Cx^{2n}$ при увеличивающихся натуральных значениях $C$, дойдёт до такого $C$, что $M_C - m_C < 10^{-100}$. При этом и $|P(0)-m_C|<10^{-100}$.

**Решение 2.** Пусть $n>2$ чётно и $Q_n(x)=n^{n-2}(x-2026)^n$. Будем называть $Q_n(x)$, увеличивая $n$. Когда $n$ станет больше $\deg P$, Петя сообщит $m_n=\min(P+Q_n)=P(x_n)+Q_n(x_n)$. Так как $Q(x)\geqslant 0$ и $Q(2026)=0$, то $P(x_n)\leqslant m_n\leqslant P(2026)$, а $x_n$ — корень производной $P'(x)+(n(x-2026))^{n-1}$. Оценим $x_n$. Пусть $P'(x)=\sum a_k(x-2026)^k$. Тогда

$$|n(x_n-2026)|^{n-1} = |P'(x)| = |\sum a_k(x_n-2026)^k| \leqslant \max(1, |x_n-2026|^{n-1})\cdot\sum|a_k|.$$

Выберем $n$ так, чтобы $2^{n-1}>\sum|a_k|$. Если при этом $\max(1,|x_n-2026|^{n-1})=|x_n-2026|^{n-1}$, то $x\neq 2026$ и $|n(x_n-2026)|^{n-1}\leqslant|2(x_n-2026)|^{n-1}$, что неверно при $n>2$. Следовательно, $\max(1,|x_n-2026|^{n-1})=1$, и тогда $|n(x_n-2026)|<2$, то есть $|x_n-2026|<\frac{2}{n}$ при $2^{n-1}>\sum|a_k|$.

Поэтому при стремлении $n$ к бесконечности $x_n$ стремится к 2026, а $P(x_n)$ стремится к $P(2026)$ снизу, тогда и $m_n$ — тоже. Нечётным $(n-1)$-м ходом спрашиваем $-Q_n(x)$ и получаем $M_n=\max(P-Q_n)$, что аналогично стремится к $P(2026)$, но сверху. Когда $M_n-m_n$ станет меньше $10^{-100}$, назовём $t=m_n$.