СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, **6-7 классы, СЛОЖНЫЙ вариант**, 15 марта 2026 г.

- *Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.*
- *Баллы за пункты одной задачи суммируются.*

Баллы — Задачи

3 1. Учащиеся 4-х, 5-х, 6-х и 7-х классов выстроились в ряд. Известно, что какой бы класс не взять, рядом с представителями этого класса будут стоять учащиеся всех других классов. Какое наименьшее количество учащихся могло быть в ряду?

4 2. Существуют ли четыре числа, попарные разности между которыми равны: 2, 2, 3, 4, 5, 6? Если существуют, приведите пример. Если нет, объясните почему.

6 3. Производственная мощность цеха сборки составляет в день 100 изделий *A* или 400 изделий *B*. Контролер, проверяющий только изделия *A*, может проверить за день не более 75 штук, а другой, проверяющий только изделия *B*, – не более 200 штук. Изделие *A* стоит в пять раз дороже изделия *B*. Сколько изделий обоих типов следует выпускать в день, чтобы общая стоимость продукции была максимальной?

6 4. Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево. На дереве выросли две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывает в карман, а золотые закапывает. Из каждой золотой монеты вырастает новое дерево, на котором может быть либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные монеты. Так продолжалось до тех пор, пока золотые монеты не закончились. В этот момент у Буратино оказалось 2026 серебряных монет. Сколько монет закопал Буратино?

5. Имеется автомат, который по двум карточкам с числами a и b выдает новую карточку с числом $ab/(a+b)$. Можно ли, имея неограниченный набор карточек с числом 2026, получить числа:

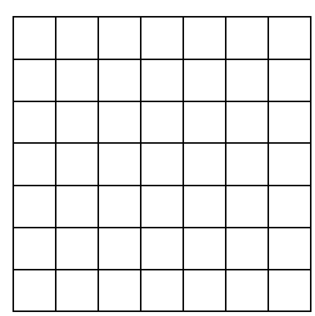
3 а) 1;

1 б) 1/26;

2 в) 26?

2 г) А можно ли с помощью такого автомата получить из неограниченного набора карточек с числом 2028 (и только из него!) число 26?

10 6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ равны углы BAD и CDA. На стороне AD выбрана точка E, а на продолжении стороны AD за точку D выбрана точка F такие, что $AE = DF$. Докажите, что $BE + CF > AB + CD$.



2 7. А) Ребра сетки хотят покрасить в два цвета – синий и зеленый так, чтобы у любого узла было ровно два зеленых ребра. Можно ли так покрасить сетку 8×8 (выглядит как квадрат 7×7, см. рисунок справа)?

3 Б) А можно ли так сделать с сеткой 9×9?

2 В) Чему будет равно количество зеленых ребер в сетке $n \times n$, если известно, что ее можно покрасить таким образом?

5 Г) Придумайте критерий (необходимое и достаточное условие), позволяющий определить, можно ли так покрасить сетку $m \times n$.

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 15 марта 2026 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 **1.** Несколько человек участвовало в школьных соревнованиях по трём видам спорта: плавание, гонки на велосипеде и бег. Кроме обычного зачёта по каждому виду спорта присуждались дополнительные награды в трёх номинациях:

«Лучший пловец среди пяти лучших велосипедистов»;

«Лучший велосипедист среди пяти лучших бегунов»;

«Лучший бегун среди пяти лучших пловцов».

Кирилл хвастается, что завоевал все три дополнительные награды, хотя ни по одному виду спорта не вошёл в тройку лучших. Какое наименьшее количество человек могло участвовать в соревнованиях?

6 **2.** Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a, b и c, имеющее целый корень. Может ли оказаться, что, какой бы из этих трёх коэффициентов ни увеличить на 1, снова получится квадратное уравнение, имеющее целый корень?

6 **3.** Имеется 11 арбузов массами 1, 2, 3, ..., 11 кг. Оля и Коля раскладывают арбузы в четыре пакета; каждый пакет выдерживает 14 кг, а от большей массы рвётся. Они по очереди выбирают любой арбуз и кладут его в любой из пакетов так, чтобы пакет не порвался. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает Оля. Кто может гарантировать себе победу, как бы ни играл другой?

7 **4.** На сторонах AB и BC треугольника ABC с углом B, равным $45°$, выбрали соответственно точки Q и P так, что угол BAP в три раза меньше угла A, а угол BCQ в три раза меньше угла C. Пусть M — точка пересечения отрезков AP и CQ. Описанные окружности треугольников BPM и BQM повторно пересекают стороны AB и BC в точках N и K соответственно. Докажите, что из отрезков AN, AC и CK можно сложить треугольник, и найдите наибольший угол этого треугольника.

8 **5.** Существует ли такое бесконечное множество S натуральных чисел, что для любых двух различных x и y из S найдётся z из S (не обязательно отличное от x и y), для которого $x^2 + y^2 + z^2$ будет точным квадратом?

6.

5 а) Существует ли отличный от параллелограмма выпуклый четырёхугольник, который можно разрезать на любое количество равных выпуклых четырёхугольников от 2 до 100?

5 б) Существует ли выпуклый четырёхугольник, не имеющий ни центра, ни оси симметрии, который можно разрезать как на 2, так и на 47 равных выпуклых четырёхугольников?

12 **7.** В каждой клетке одной из главных диагоналей доски 90×90 стоит конь. За какое наименьшее число ходов кони могут занять все клетки другой главной диагонали?

СОРОК СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

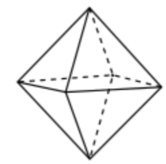
Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 15 марта 2026 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 **1.** Каждую грань правильного октаэдра (см. рисунок) разбили средними линиями на правильные треугольники (всего получилось 32 одинаковых маленьких правильных треугольника). Какое наибольшее число этих треугольников можно закрасить так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих вершин?



5 **2.** Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Ведущий разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит — игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего ведущий незаметно для игрока выбирает по шарику из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, игрок получит приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы ведущий ни менял шарики?

6 **3.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, L — точка пересечения его диагоналей. Описанная окружность треугольника ABD пересекает сторону BC в точке Y, а описанная окружность треугольника BCD пересекает сторону AB в точке X. Докажите, что углы XLA и YLC равны.

9 **4.** Назовём набор из k последовательных натуральных чисел *неудачным*, если невозможно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы среди выбранных делителей не было одинаковых. При каждом ли натуральном k количество неудачных наборов из k последовательных натуральных чисел конечно?

10 **5.** Существует ли выпуклый пятиугольник со свойством: для каждой точки на его границе найдётся квадрат, вписанный в пятиугольник, и такой, что выбранная точка является одной из вершин квадрата? (Квадрат считается вписанным, если все его вершины лежат на границе пятиугольника.)

10 **6.** На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставлены $2n$ ладей (n — натуральное число). Докажите, что можно выбрать либо n горизонталей, либо n вертикалей и снять все ладьи с выбранных n рядов так, что оставшиеся ладьи не будут бить друг друга.

12 **7.** Петя загадал многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. За один ход Вася может назвать любой многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, а в ответ Петя должен сообщить

• достигается ли максимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно;

• достигается ли минимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно.

Докажите, что Вася может последовательно задавать вопросы так, чтобы в какой-то момент он перестал их задавать и назвал такое число t, что $|P(2026)-t| < 10^{-100}$.