# Геометрия и линейная алгебра
# Лекция 1

## 1 Введение

Для начала кратко напомним основные факты и определения о геометрических векторах и комплексных числах.

**Определение.** *Радиус-вектором* в пространстве называется направленный отрезок $OX$ с началом в начале координат. Его длиной называется длина этого отрезка. Длина $x$ обозначается $|x|$.

Так как для каждого вектора можно найти равный ему с началом в начале координат, то все дальнейшие рассуждение подходят и для векторов в привычном определении. Но для простоты изложения везде далее мы будем называть радиус-векторы просто векторами (и, как потом увидим, будем вполне правы).

**Определение.** *Суммой* векторов $x$ и $y$ называется вектор $x+y$, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на $x$ и $y$ как на сторонах.

**Определение.** *Произведением* числа $\lambda$ на вектор $x$ называется вектор длины$|\lambda| \cdot |x|$, и имеющий то же направление, что и $x$, если $\lambda > 0$ и противоположное $x$ направление, если $\lambda < 0$.

**Определение.** *Скалярным произведением* векторов $x$ и $y$ называется число, равное $(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\alpha$, где $\alpha$ – угол между векторами $x$ и $y$.

Каждому вектору можно сопоставить точку, являющуюся его концом. Таким образом для каждого вектора однозначно определены его координаты, являющиеся координатами этой точки. Тогда сумма, умножение числа на вектор и скалярное произведение выглядят, как несложно проверить, следующим образом (доказательства оставляем читателю в качестве упржнения).

Сумма векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ есть вектор $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

Произведение числа $\lambda$ на вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ есть вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

Скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ есть число $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

Два вектора называются коллинеарными, если их направления совпадают либо противоположны.

**Определение.** Линейной комбинацией векторов $v_1, \cdots, v_m$ с коэффициентами $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ называется вектор $\alpha_1v_1 + \cdots + \alpha_mv_m$. Линейная комбинация называется нетривиальной, если не все $\alpha_i$ равны нулю, и тривиальной в противном случае.

**Определение.** Система векторов $v_1, \cdots, v_m$ называется линейно независимой, если она не содержит нулевого вектора и никакой вектор этой системы не является линейной комбинацией остальных.

**Определение.** Базисом пространства называется система линейно независимых векторов, такая что каждый вектор пространства единственным образом выражается через эту систему.

**Упражнение.** Показать, что любой базис пространства состоит из трёх векторов.

**Определение.** Координатами вектора $x$ в базисе $v_1, v_2, v_3$ называются числа $(x_1, x_2, x_3)$, такие что $x = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$. Ясно, что понятие координат вектора, введённое выше – это просто координаты вектора в базисе $e_1, e_2, e_3$ из векторов единичной длины, сонаправленных осям координат $Ox, Oy, Oz$.

Множество точек пространства называется трёхмерным аффинным пространством. В нём есть естественная операция суммы точки и вектора, результат которой – результат параллельного переноса этой точки на этот вектор. Заметим, что между точками и векторами пространства имеется взаимно-однозначное соответствие, ставящее каждой точке вектор с концом в этой точке. Во многих случаях мы будем позволять себе вольность, не делая разницы между множеством точек и множеством векторов в пространстве, и обозначать и то, и другое $\mathbb{R}^3$.

**Определение.** Линейной функцией называется отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, такое что $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

**Упражнение.** Докажите, что любая линейная функция имеет вид $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$.

Таким образом, всякую линейную функцию можно рассматривать как скалярное умножение на некоторый вектор.

**Определение.** Аффино-линейной функцией называется отображение $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, представимое в виде $g(x) = f(x) + b$, где $f(x)$ – линейная функция, а $b$ – некоторое число.

Как известно из геометрии, всякое аффинно-линейное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ всё пространство, если $x_i = 0, b = 0$, пустое множество точек, если $x_i = 0, b \neq 0$ или некоторую плоскость в пространстве в противном случае.

Применим теперь геометрию для исследования систем линейных уравнений.

Система аффинно-линейных уравнений (далее для краткости называемых просто линейными) от трёх переменных имеет вид:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 = b_m \end{cases}$$

Она задаёт в $\mathbb{R}^3$ некоторое множество точек. Если какое-то уравнение задаёт пустое множество, то система несовместна. Если же некоторое уравнение задёт всё пространство, то это уравнение можно выкинуть. Предположим теперь, что каждое уравнение задаёт плоскость. Тогда вся система, очевидно, может задавать плоскость, прямую, точку, или пустое множество.

Указанные рассуждения обобщаются и на случай $n$ переменных, чем в частности мы дальше и займёмся.

## 2 Векторные пространства

Векторы на плоскости и в пространстве можно обобщить на многомерный случай с сохранением большинства свойств. Это помогает рассматривать многие объекты, "линейно зависящие" от $n$ переменных, сохраняя при этом геометрическую интуицию и сильно упрощая язык. Примерами задач, которые мы будем рассматривать далее, является исследование систем линейных уравнений от $n$ переменных, решение линейных рекурректных уравнений с постоянными коэффициентами, линейно-алгебраический метод в экстремальной комбинаторике.

**Определение.** *Векторным пространством* $\mathbb{R}^n$ называют множество векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i$ – вещественные числа ($x_i \in \mathbb{R}$).

Числа $x_i$ называют *координатами* вектора $x$. Два вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$, $1 \le i \le n$.

Операции сложения и умножения на число очевидным образом обобщаются на $n$-мерный случай:

**Определение.** *Суммой* векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ называется вектор $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

**Определение.** *Произведением* числа $\lambda$ на вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ называется вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

**Определение.** Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *линейной функцией*, если $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

**Упражнение.** Докажите, что любая линейная функция имеет вид $f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$.

Пришло время ввести общее определения линейного пространство (ещё их называют векторными пространствами).

**Определение.** Векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ называется множество $V$, на котором заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число из $\mathbb{R}$, которое удовлетворяет следующим свойствам.

Операция + сложения векторов сопоставляет каждой паре векторов вектор, называемый их суммой. Операция умножения на число сопоставляет паре из вещественного числа и вектора новый вектор.

1. Операция сложения векторов ассоциативна и коммутативна.
2. $V$ содержит нулевой вектор, то есть такой вектор 0, что $v + 0 = 0 + v = v \forall v \in V$.
3. Для каждого вектора $v \in V$ в $V$ существует вектор $-v$, такой что $v + (-v) = 0$.
4. Операция умножения на число обладает следующими свойствами: $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ и $1 \cdot v = v$.
5. Дистрибутивность: $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$, $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ $\forall v, w \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Упражнение-пример. Докажите, что следующие множества являются векторными пространствами:

1. Множество полиномов с естественными операциями сложения и умножения на число.
2. Множество полиномов степени не выше $n - 1$ с теми же операциями.
3. Множество векторов в пространстве.
4. Множество $\mathbb{R}^n$.
5. Множество функций $f : K \to \mathbb{R}$ с операциями $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
6. Множество таких бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, для которых $a_n = 3a_{n-1} - 5a_{n-2}, n \ge 3$ с операциями покомпонентного сложения и умножения на число.

**Определение.** Подпространством векторного пространства $V$ называется непустое подмножество $V$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на число.

Примеры. Подпространства $\mathbb{R}^3$ – а) нуль-вектор б) множество векторов, параллельных некоторой прямой или плоскостью в) всё $\mathbb{R}^3$.

Множество полиномов степени не выше $n-1$ – подпространство множества всех полиномов.

Множество таких бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, для которых $a_n = 3a_{n-1} - 5a_{n-2}, n \geq 3$ – подпространство пространства всех вещественных последовательностей с операциями покомпонентного сложения и умножения на число.

**Определение.** Линейной комбинацией векторов $v_1, \cdots, v_m$ с коэффициентами $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ называется вектор $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$. Линейная комбинация называется нетривиальной, если не все $\alpha_i$ равны нулю, и тривиальной в противном случае.

**Определение.** Система векторов $v_1, \cdots, v_m$ называется линейно независимой, если она не содержит нулевого вектора и никакой вектор этой системы не является линейной комбинацией остальных.

**Определение.** Базисом векторного пространства $V$ называется система линейно независимых векторов, такая что каждый вектор $V$ единственным образом выражается через эту систему.

Оказывается, структуру всех векторных пространств, имеющих конечный базис, можно очень просто описать. Для того, чтобы говорить, что какие-то два векторных пространства одинаково устроены, нам понадобится понятие изоморфизма.

**Определение.** Два векторных пространства $V_1$ и $V_2$ называются изоморфными, если существует взаимно-однозначное отображение $\phi : V_1 \to V_2$, сохраняющее операции векторных пространств, то есть такое, что $\phi(\lambda v + \mu w) = \lambda\phi(v) + \mu\phi(w)$.

**Теорема 2.1.** *Пусть векторное пространство $V$ имеет базис из $n$ векторов. Тогда $V$ изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение, которое переводит базисные векторы в канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Продолжите это оторбражение на остальные векторы, и докажите, что это и правда изоморфизм. □

# 3 Задачи к лекции

1. Доказать, что если векторы $a_1, a_2, a_3$ линейно зависимы и $a_3$ не выражается линейно через $a_1$ и $a_2$, то $a_1$ и $a_2$ различаются лишь числовым множителем.

2. Пусть дана система векторов

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),$$
$$i = 1, \ldots, s; s \leq n$$

Докажите, что если

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{s} |a_{ij}|,$$

то данная система векторов линейно независима. [Указание: предположите, что это не так и рассмотрите вектор с самым большим по модулю коэффициентом в линейной комбинации, равной нулю].

3. Докажите, что система функций $\{1, \sin x, \cos x\}$ линейно независима.