Геометрия и линейная алгебра
Задачи

1. Докажите, что $\mathrm{rk}\,(A+B) \leq \mathrm{rk}\,(A) + \mathrm{rk}\,(B)$.

2. Докажите, что всякая матрица ранга r представляется в виде r матриц ранга 1, но не представляется в виде меньшего их числа.

3. Докажите, что если $\mathrm{rk}\,A = r$, то минор на пересечении любых r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов отличен от нуля.

4. Вычислить определитель матрицы $n \times n$ (b_{ij}), где $p_i(a_j)$, где $p_i(x)$ – многочлен степени не выше $n-2$.

5. Вычислить определитель матрицы (a_{ij}), где

а) $a_{ij} = 1$, если i делит j, и 0 в противном случае.

б) $a_{ij} =$ число общих делителей i и j

в) $a_{ij} =$ НОД(i,j).

6. Докажите, что $\mathrm{rk}\,(AB) \leq \mathrm{rk}\,(A)\,\mathrm{rk}\,(B)$.

7. Пусть A, B – матрицы размера $m \times n$ и $m \times k$. Докажите, что уравнение $AX = B$, где X – матрица размеров $n \times k$, имеет решение тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}\,(A) = \mathrm{rk}\,(A|B)$.

8. Пусть $A, B : V \to W$ – линейный отображения. Докажите, что $Ker(A) \subseteq Ker(B)$ тогда и только тогда, когда $B = CA$ для некоторого линейного отображения $C : W \to W$.

9. Как изменяются координаты вектора x при переходе от одного базиса к другому?

10. Докажите, что всякое k-мерное подпространство n-мерного векторного пространства V является пересечением ядер некоторых $n-k$ линейных функций $V \to \mathbb{R}$.

11. Пусть A, B, C – линейные отображения $V \to V$ неравенство Фробениуса:

$$\mathrm{rk}(BA) + \mathrm{rk}(AC) \leq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(BAC)$$