ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

1 Понятие множества. Операции над множествами

В математике встречаются самые разнообразные множества. Можно говорить о множестве граней многогранника, множестве точек на прямой, множестве натуральных чисел и т.д. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова "множество"его синонимами: совокупность, собрание элементов и т. д. [1]

Пусть A и B – произвольные множества.

Определение 1. *Объединением, или суммой множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B. Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$ или $A + B$.*

Определение 2. *Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B. Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$ или AB.*

Аналогично определяются объединение и пересечение любого, конечного или бесконечного, числа множеств, а именно: если A_α – произвольное семейство множеств, то их объединение $\cup_\alpha A_\alpha$ называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_α. Пересечением $\cap_\alpha A_\alpha$ множеств A_α называется множество тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A_α.

Операции объединения и пересечения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, т. е. для любых множеств A, B и C выполнены следующие соотношения:

$A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Определение 3. *Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B. Разность множеств A и B обозначают $A \setminus B$.*

Определение 4. *Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B, либо принадлежат множеству B, но не принадлежат множеству A. Симметрическую разность множеств A и B обозначают $A \triangle B$.*

Определение 5. *Произведением множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Произведение множеств A и B обозначается $A \times B$.*

Аналогично, произведением любого конечного числа множеств A_1, A_2, ..., A_n будем называть множество всевозможных упорядоченных наборов $(a_1, a_2, ..., a_n)$, таких, что $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$. Произведение множеств A_1, A_2, ..., A_n обозначается $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. В частности, если $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, произведение $A \times A \times ... \times A$ будем обозначать A^n и называть n-той степенью множества A.

Пример. Произведением $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ является множество всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел.

Пусть нам дана последовательность множеств A_1, A_2, ...

Определение 6. *Верхним пределом последовательности множеств A_n, $n = 1, 2, ...$, называется множество всех тех и только тех элементов x, каждый из которых принадлежит бесконечному числу множеств последовательности A_n. Верхний предел последовательности множеств обозначается $\overline{\lim} A_n$.*

Определение 7. *Нижним пределом последовательности множеств A_n, $n = 1, 2, ...$, называется множество всех тех и только тех элементов x, каждый из которых принадлежит всем множествам последовательности A_n, за исключением, быть может, конечного числа. Нижний предел последовательности множеств обозначается $\underline{\lim}\, A_n$.*

Нетрудно видеть, что выполнены следующие формулы:

$$\overline{\lim}\, A_n = \cap_{i=1}^{\infty} \cup_{n=i}^{\infty} A_n,$$

$$\underline{\lim}\, A_n = \cup_{i=1}^{\infty} \cap_{n=i}^{\infty} A_n.$$

Очевидно, $\underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n$. Если $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$, то последовательность множеств A_n называется сходящейся, а множество $A = \underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$ называется пределом последовательности множеств A_n.

Пример. Пусть M, N – некоторые множества. Рассмотрим последовательность множеств M, N, M, N, ... Очевидно, верхним пределом такой последовательности является множество $M \cup N$, а нижним пределом – множество $M \cap N$. Последовательность является сходящейся в том и только том случае, когда $M = N$.

2 Эквивалентные множества. Мощность множества. Счетное множество и континуум

Предположим, что A и B – два множества, и задано некоторое отображение $f : A \to B$. Отображение f называется инъекцией, если для любых двух элементов $a_1, a_2 \in A$ выполнено $f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение f называется сюръекцией, если для любого $b \in B$ найдется $a \in A$, такой что $f(a) = b$. Наконец, говорят, что отображение f является биекцией, если оно одновременно является инъекцией и сюръекцией.

Биекция, по сути, является ни чем иным, как взаимно однозначным отображением между двумя множествами. Биекция разбивает совокупность всех элементов множеств A и B на пары (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, причем каждый элемент обоих множеств A и B принадлежит одной и только одной такой паре.

Определение 8. *Будем говорить, что множество A эквивалентно множеству B, и писать в этом случае $A \sim B$, если между ними можно установить биекцию. Если множества A и B эквивалентны, то говорят, что множества A и B имеют одинаковую мощность.*

Отметим, что отношение, обозначенное нами значком $\sim$, действительно является отношением эквивалентности, то есть если A, B, C – некоторые множества, то

1) $A \sim A$;

2) если $A \sim B$, то $B \sim A$;

3) если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Мощность конечного множества удобно отождествлять с количеством элементов этого множества. Действительно, два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда и в том, и в другом насчитывается одинаковое число элементов.

Мощность множества A будем обозначать $|A|$. Если A_1, A_2, ..., A_n – набор конечных множеств, то для них справедлива следующая формула, называемая *формулой включений и исключений*:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - ... - |A_{n-1} \cap A_n| + ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Упражнение 1. Докажите формулу включений и исключений (подсказка: применить метод математической индукции).

Эквивалентность двух множеств, насчитывающих более чем конечное число элементов, является, конечно, значительно более сложным вопросом. Немало поколений школьников были повергнуты мною в шок сообщением, что, оказывается, натуральных чисел и четных натуральных чисел поровну. Действительно, напрашивается предположение, что, поскольку лишь каждое второе натуральное число является четным, то натуральных чисел должно быть в два раза больше, чем четных натуральных чисел. Так бы оно и было, если бы оба изучаемых нами множества были конечны; однако в случае с двумя бесконечными множествами ситуация совершенно иная. Очевидно, что функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, задаваемая формулой $f(n) = 2n$, устанавливает биекцию между двумя указанными множествами, т.е. они эквивалентны (или, выражаясь чуть менее формальным языком, содержат поровну элементов).

Нетрудно также построить биекцию между множеством натуральных чисел и множеством целых чисел. Осуществить это можно, например, так: если n – нечетное натуральное число, то сопоставим ему число $\frac{n+1}{2}$, а если n – четное, то $\frac{2-n}{2}$. Тем самым установлено, что $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Определение 9. *Суммой мощностей a и b будем называть мощность множества $A \cup B$, где A и B – непересекающиеся множества мощностей a и b соответственно.*

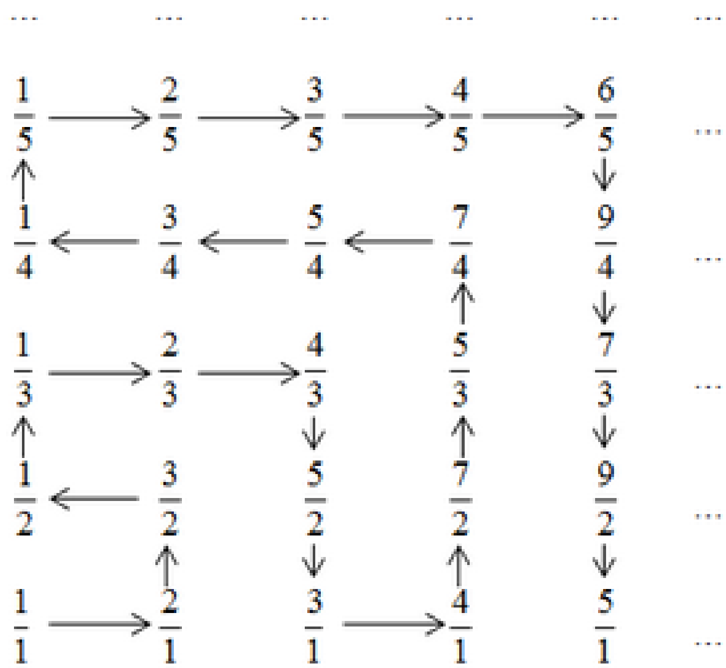
Аналогично можно ввести сумму любого, конечного или бесконечного, числа мощностей: если a_α – некоторый набор мощностей, то их сумма $\sum\limits_\alpha a_\alpha$ есть мощность множества $A = \cup_\alpha A_\alpha$, где A_α – непересекающиеся множества и $|A_\alpha| = a_\alpha$.

Определение 10. *Произведением мощностей a и b будем называть мощность множества $A \times B$, где A и B – множества мощностей a и b соответственно (множества A и B могут иметь общие элементы).*

Любое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется счетным. Последнее определение можно сформулировать и иначе: например, бесконечное множество является счетным, если его элементы можно занумеровать или выписать в бесконечную строку.

Докажем счетность множества рациональных чисел. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что для этого достаточно доказать эквивалентность множеств $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. Попытаемся построить биекцию между двумя этими множествами. Очевидно, для этого достаточно построить биективное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, где $\mathbb{Q}^+$ – множество всех неотрицательных рациональных чисел, и потом продолжить его на $\mathbb{Z}$ следующим образом: $f(0) = 0$, $f(-n) = -f(n)$.

Запишем все положительные рациональные числа в такую таблицу:



Далее, будем идти по нашей таблице по пути, обозначенном стрелками, и последовательно нумеровать все числа, которые нам встретятся. Так, число 1 получит номер 1, число $\frac{3}{2}$ получит номер 3, а число 5 получит номер 25. Нетрудно видеть, что таким образом установлена биекция между множеством натуральных чисел и множеством неотрицательных рациональных чисел. Поэтому множество рациональных чисел является счетным.

Зададимся теперь следующим вопросом: а не являются ли вообще все бесконечные множества счетными? Увы, очень скоро мы убедимся, что множество действительных чисел уже не является счетным. Рассмотрим множество действительных чисел из интервала $(0, 1)$. Допустим, что такое множество является счетным, то есть что его элементы можно пронумеровать:

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}...a_{1n}...,$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}...a_{2n}...,$$

$$...,$$

$$\alpha_k = 0, a_{k1}a_{k2}...a_{kn}...$$

Покажем, что всегда можно найти еще одно число из интервала $(0, 1)$, оставшееся без номера. Построим число $\beta = 0, b_1b_2...b_n...$ следующим образом: всякий раз в качестве цифры b_k будем выбирать цифру, не равную 0, 9, а также отличающуюся от a_{kk} не менее чем на 2. Нетрудно видеть, что $\beta \neq \alpha_k$ при каждом k. Тем самым доказано, что множество (0, 1) несчетно.

Говорят, что множество всех действительных чисел из интервала (0, 1) имеет мощность континуума. Нетрудно построить биекции между (0, 1) и $\mathbb{R}$, [0, 1], [0, 1), (a, b) и тем самым доказать, что перечисленные множества также имеют мощность континуума.

Говорят, что счетное множество имеет мощность алеф-нуль (пишется $\aleph_0$). Про множество мощности континуум также говорят, что оно имеет мощность алеф ($\aleph$).

Утверждение 1. $\aleph_0 + \aleph_0 + ... + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$.

Доказать утверждение можно тем же способом, каким выше была доказана счетность множества всех рациональных чисел.

Утверждение 2. $\aleph + \aleph_0 = \aleph$.

Действительно, рассмотрим некое множество, имеющее мощность континуума, например, множество всех вещественных чисел, и присоединим к нему некое счетное множество A, состоящее из элементов a_i, $i = 1, 2, ...$, причем $a_i \notin \mathbb{R}$ при всех $i \in \mathbb{R}$. Построим биекцию между множествами $a_i \sqcup \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Пусть $f : a_i \sqcup \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по следующему правилу: если $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, то $f(x) = x$, если $x \in \mathbb{N}$, то $f(x) = 2x$; наконец, $f(a_i) = 2i - 1$. Нетрудно видеть, что отображение f устанавливает биекцию между множествами $a_i \sqcup \mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Тем самым требуемое доказано.

Если M – некоторое множество, то множество всех его подмножеств обозначают 2^M. Отметим, что если M – конечное множество и $|M| = n$, то у M есть всего 2^n подмножеств (конечно, включая само M и пустое множество).

Упражнение 2. Докажите последнее утверждение.

Упражнение 3. Воспользовавшись последним утверждением, докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + ...C_n^n = 2^n$, где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

Теорема 1. *Множество всех подмножеств множества натуральных чисел имеет мощность континуума.*

Доказательство. Отметим, в первую очередь, что всякому подмножеству множества натуральных чисел можно сопоставить бесконечную последовательность нулей и единиц. Сделать это можно следующим образом: для множества $M \subseteq \mathbb{N}$, если $i \in M$, то в соответствующей последовательности нулей и единиц на i-том месте стоит 1. Если же $i \notin M$, то в соответствующей множеству M последовательности нулей и единиц на i-том месте стоит 0. Очевидно, такое отображение будет взаимно однозначным. Поэтому фактически можно доказывать, что множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц имеет мощность континуума.

Далее, всякой последовательности нулей и единиц нетрудно сопоставить число, принадлежащее отрезку [0, 1], имеющую соответствующую двоичную запись. Правда, это отображение уже не является взаимно однозначным, поскольку, например, последовательностям 0111111... и 10000000... будет сопоставлено одно и то же число, а именно 1. Чтобы избавиться от вышеизложенной бяки, обозначим множество всевозможных последовательностей нулей и единиц через M и представим его в виде $M = M_0 \sqcup M_1$, причем во множество M_0 включим те и только те последовательности, которые содержат лишь конечное число единиц (отметим, что элементам множества M_0 соответствуют конечные подмножества множества натуральных чисел). Нетрудно видеть, что описанный выше способ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством M_1 и множеством $(0,\, 1]$. Поэтому $M_1 = \aleph$. Нетрудно убедиться, что $|M_0| = \aleph_0$, и теперь требуемое вытекает из леммы 2.

Следствие. *Множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц имеет мощность континуума.*

Утверждение 3. $\aleph\aleph_0 = \aleph$.

3 Сравнение мощностей множеств

Нам хотелось бы теперь получить некий способ сравнения двух множеств, т. е. способ определить, какое из двух множеств имеет большую мощность, чем другое. Как определить, что множество A имеет мощность большую, чем множество B? Наиболее естественным выглядит такое определение: будем говорить, что множество A имеет мощность больше, чем множество B, если множества A и B не эквивалентны, но существует подмножество $A_1 \subseteq A$, эквивалентное B.

Но, прежде чем ввести такое определение, обсудим такой вопрос. Допустим существование множеств A и B таких, что множества A и B не являются эквивалентными, однако есть подмножество $A_1 \subseteq A$, эквивалентное множеству B, и есть подмножество $B_1 \subseteq B$, эквивалентное множеству A. Существование таких множеств все нам испортит, поскольку в этом случае мы увидим, что множество A имеет мощность больше, чем множество B, и одновременно множество B имеет мощность больше, чем множество A. К счастью, следующая классическая теорема доказывает, что такой случай невозможен.

Теорема 2 (Кантора-Бернштейна). Пусть A и B – некоторые множества, $A_1 \subseteq A$ и $B_1 \subseteq B$. Если $A \sim B_1$ и $B \sim A_1$, то $A \sim B$.

Доказательство. Будем считать, что $A \cup B = \varnothing$. Пусть $f : A \to B_1$ и $g : B \to A_1$ – биекции. Выберем произвольный элемент $x_0 \in A$ и рассмотрим последовательность элементов $x_1, x_2, ...$, определенную таким правилом: если n четно, то x_{n+1} – это такой элемент в B, что $g(x_{n+1}) = x_n$, а если n нечетно, то x_{n+1} – это такой элемент в A, что $g(x_{n+1}) = x_n$. Естественно, такая последовательность может оказаться как конченой, так и бесконечной. Если для какого-то элемента $x \in A$ соответствующая последовательность окажется конечной и окончится элементом x_n, то скажем, что x – элемент порядка n; если же соответствующая последовательность окажется бесконечной, то скажем, что x – элемент бесконечного порядка.

Представим теперь множество A в виде $A = A_E \sqcup A_O \sqcup A_I$, где A_O – множество элементов нечетного порядка, A_E – множество элементов четного порядка, A_I – множество элементов бесконечного порядка. Осуществим аналогичное разбиение множества $B = B_E \sqcup B_O \sqcup B_E$. Заметим, что f взаимно однозначно отображает A_E на B_O и A_I на B_I, а g^{-1} взаимно однозначно отображает A_O на B_E. Поэтому отображение ψ, совпадающее с f на $A_E \sqcup A_I$ и с g^{-1} на A_O, является биекцией между множествами A и B. Тем самым $a \sim B$. **Теорема доказана.**

Теперь мы уже обладаем достаточными средствами для того, чтобы пытаться сравнить два множества. Итак, пусть A и B – некоторые множества. Мы будем говорить, что

1) мощность A равна мощности B, если существует подмножество $A_1 \subseteq A$, эквивалентное B, и существует подмножество $B_1 \subseteq B$, эквивалентное A;

2) мощность A больше мощности B, если существует подмножество $A_1 \subseteq A$, эквивалентное B, и но не существует подмножества $B_1 \subseteq B$, эквивалентного A;

3) мощность A меньше мощности B, если не существует подмножества $A_1 \subseteq A$, эквивалентного B, но существует подмножество $B_1 \subseteq B$, эквивалентное A;

и, увы, мы не в состоянии пока исключить следующего неприятного случая, который несколько портит нам пейзаж:

4) мощности множеств A и B не сравнимы между собой, если не существует подмножества $A_1 \subseteq A$, эквивалентного B, и не существует подмножества $B_1 \subseteq B$, эквивалентного A.

Описанная классификация позволяет нам сравнивать между собой мощности разных множеств, но, к сожалению, пока мы не можем утверждать, что любые две мощности сравнимы между собой. Ниже мы докажем, что на самом деле случай 4) невозможен и, следовательно, любые две мощности сравнимы. Пока мы к этому морально не готовы, поэтому отложим решение этого вопроса до лучших времен и займемся пока другими, не менее интересными делами.

Ответим на следующий вопрос: нельзя ли придумать бесконечное множество, меньшее по мощности, нежели счетное множество? Иначе говоря, является ли счетное множество самым маленьким из всех бесконечных множеств? Оказывается, ответ на этот вопрос положительный, что доказывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть A – какое-нибудь бесконечное множество и $a_1 \in A$, $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$, ..., $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и так далее. Таким образом, можем построить счетное подмножество $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества A. **Теорема доказана.**

Наконец, рассмотрим еще один вопрос: нельзя ли придумать некое множество, не меньшее по мощности, чем любое другое множество? На этот раз ответ отрицательный: какое бы множество вы не придумали, я все равно придумаю множество большей мощности. Чтобы удостовериться в этом, докажем следующую теорему:

Теорема 4. *Для любой мощности* α *имеем* $2^{\alpha} > \alpha$.

Доказательство. Пусть M – произвольное множество. Очевидно, существует система подмножеств множества M, эквивалентная множеству M (такова, например, система всех одноэлементных подмножеств множества M). Предположим, что во множестве M выделена система подмножеств, эквивалентная множеству M, то есть каждому элементу $m \in M$ сопоставлено некое подмножество $M_m \subseteq M$. Покажем, что обязательно найдется еще одно подмножество $N \subseteq M$, не сопоставленное ни одному из элементов множества M. Пусть X – множество тех и только тех элементов из M, которые не принадлежат множествам, которые им соответствуют. Иначе говоря, $x \in X$ тогда и только тогда, когда $x \notin M_x$. Покажем теперь, что множество X не сопоставлено ни одному элементу множества M. Действительно, пусть X сопоставлено элементу $x_0 \in M$. Если $x_0 \in X$, то x_0 является элементом множества, которому он сопоставлен, и потому не может принадлежать X. Если же $x_0 \notin X$, то x_0 не принадлежит множеству, которому он сопоставлен, и потому должен лежать в X. Приходим к противоречию. **Теорема доказана.**

Дальнейшее понятно: допустим, что M – некое множество, столь большое, что любое другое множество, какое бы вы не придумали, имеет мощность не большую, чем M. Рассмотрим множество всех подмножеств множества M. Согласно предыдущей теореме, оно имеет мощность больше, чем M, что противоречит предположению. Поэтому придумать самое большое множество не представляется возможным.

4 Парадоксы теории множеств

Парадокс Рассела. Каждое множество X либо является элементом самого себя, либо не является. Пусть Y – множество, элементами которого являются те и только те множества X, которые не являются элементами самого себя. Очевидно, либо $Y \in Y$, либо $Y \notin Y$. Однако, и тот, и другой вариант немедленно приводит к противоречию: если $Y \in Y$, то по определению Y не должно быть элементом самого себя. Если же $Y \notin Y$, то множество Y должнобыть элементом самого себя.

Парадокс Кантора. Пусть M – множество всех множеств. По определению, $2^M \subseteq M$. Однако, множество 2^M имеет мощность больше, чем множество M, что немедленно приводит к противоречию.

Чтобы исключить такие парадоксы, в теории множеств приняты некоторые дополнительные допущения. В первую очередь, такого понятия, как "множество всех множеств всячески избегают. Далее, принята так называемая аксиома фундирования, которая гласит: не существует бесконечной последовательности множеств X_1, X_2, ..., такой что $X_1 \in X_2$, $X_2 \in X_3$ и так далее. В частности, такая аксиома исключает существование множества, являющегося элементом самого себя, что разрешает парадокс Расселла.

Приведу еще один забавный, не очень научный парадокс. Пусть A – множество всех натуральных чисел, которые можно описать менее чем тридцатью словами. Множество A должно быть конечным, поскольку конечно множество всех слов русского языка. Поэтому найдется наименьшее натуральное число a, не принадлежащее множеству A. Т. е. a – наименьшее число, которое не может быть описано менее чем тридцатью словами. Однако мы только что описали число a, использовав не больше тридцати слов! Получили противоречие.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырёх комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

2. В некоторой стране есть торговый город (назовем его O) и $2n$ поселений (обозначим их A_1, A_2, ..., A_n и B_1, B_2, ..., B_n). Из города O выходит караван, который проходит по всем поселениям по одному разу и возвращается в город O. Известно, что пары городов A_i и B_i, $i = 1, 2, ..., n$ враждуют между собой. В маршруте каравана два враждующих города не могут идти подряд (в противном случае тот из враждующих городов, который был посещен позже, не впустит караван). Сколько маршрутов существует у каравана?

3. Пусть дано некое множество попарно непересекающихся отрезков на числовой прямой. Докажите, что такое множество конечно или счетно.

4. Докажите, что если M – произвольное бесконечное множество и A – счетное множество, то $A \cup M \sim M$.

5. Докажите, что множество всех числовых функций, определенных на некотором множестве M, то есть функций $f : M \to \mathbb{R}$, имеет мощность больше, чем множество M.

6. *Докажите, что множество всех точек квадрата имеет мощность континуума. Иначе говоря, докажите, что $\aleph \times \aleph = \aleph$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - Москва, "Наука". - 1976. - 543 с.

2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. / Ф. Хаусдорф. - Москва, Изд-во ЛКИ. - 2007. - 302 с.

3. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. / Н. Я. Виленкин. - Москва, Изд-во МЦНМО. - 2004. - 152 с.

4. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Москва, Изд-во МЦНМО. - 2011. - 608 с.