ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

1 Упорядоченность, частичная упорядоченность и вполне упорядоченность множеств

Пусть M – некоторое множество.

Определение 2.1. *Множество M называется частично упорядоченным, если выбрано некое подмножество P произведения $M \times M$, причем множество P обладает следующими свойствами:*

1) для $\forall a \in M$ $(a, a) \subseteq P$;

2) если $a, b \in M$, причем $(a, b) \in P$ и $(b, a) \in P$, то $a = b$;

3) если $a, b, c \in M$, причем $(a, b) \in P$ и $(b, c) \in P$, то $(a, c) \in P$.

Определение 2.2. *Если множество M частично упорядоченное, причем для любых двух его элементов $a, b \in M$ выполнено либо $(a, b) \in P$, либо $(b, a) \in P$, то множество M называется упорядоченным.*

Поясним, что означают введенные определения. Естественно считать, что множество M упорядоченно, если для любых двух его элементов a и b мы можем сказать или что $a \leqslant b$, или что $b \leqslant a$. При этом бинарное отношение, соответствующее значку $\leqslant$, должно обладать какими-то естественными свойствами. Например, нелепо было бы полагать, что для каких-то двух различных элементов a и b имеем $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$. Поэтому требуется, чтобы одновременное выполнение таких неравенств было бы невозможным.

В приведенном выше определении упорядоченного множества множество P есть ни что иное, как множество всех таких пар (a, b), $a, b \in M$, что $a \leqslant b$ (то есть $a < b$ или $a = b$). Естественно, что на упорядоченном или частично упорядоченном множестве можно ввести также операции $<$ ($a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$), $>$ ($a > b$, если неверно, что $a \leqslant b$), $\geqslant$ ($a \geqslant b$, если $a > b$ или $a = b$).

Например, множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ являются упорядоченными.

Между тем, нетрудно предложить примеры множеств, упорядочить которые не так-то просто. Пусть, например, $M = 2^{\mathbb{R}}$. Попробуем упорядочить элементы множества M. Наиболее естественным выглядит такое определение: множество A не больше, чем множество B, если $A \subseteq B$. К сожалению, такое определение не совсем хорошо по следующей причине: например, про множества $[0, 2]$ и $[1, 3]$ нельзя сказать ни того, что $[0, 2] \leqslant [1, 3]$, ни того, что $[1, 3] \leqslant [0, 2]$. То есть на множестве $M = 2^{\mathbb{R}}$ удобно ввести то, что называют частичным порядком, то есть бинарное отношение $\leqslant$, которое обладает перечисленными выше свойствами 1), 2), 3), но не позволяет нам, вообще говоря, сравнить между собой любые два элемента из множества M.

Два упорядоченных множества A и B называются подобными, если существует взаимно однозначная функция $f : A \to B$, сохраняющая порядок, то есть такая, что $f(a) \leqslant f(b)$, если $a \leqslant b$. Из определения вытекает, что любые два подобных множества эквивалентны. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, множество целых чисел эквивалентно множеству натуральных чисел, но не подобно ему (если упорядочить их естественным образом). С другой стороны, множество натуральных чисел подобно множеству четных натуральных чисел.

Про подобные множества также говорят, что они имеют один и тот же порядковый тип (точно так же, как про эквивалентные множества говорят, что они имеют одинаковую мощность).

Множество M называется вполне упорядоченным, если оно упорядочено, причем каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Например, множество всех натуральных чисел является вполне упорядоченным, а множество целых чисел – нет.

Сформулируем теперь следующую важную теорему:

Теорема 2.1 (Цермело). *Всякое множество может быть вполне упорядочено.* (Данную теорему привожу без доказательства)

Разрешим следующее противоречие: двумя строчками выше я утверждал, что множество всех целых чисел не является вполне упорядоченным, что, казалось бы, должно противоречить теореме Цермело. Обсудим, в чем же тут дело.

Отметим, в первую очередь, что, когда речь идет о множестве целых чисел, мы рассматриваем его лишь как набор каких-то объектов, которые можно обозначать 1, 0, -1 и так далее. Мы забываем теперь о привычных нам свойствах множества целых чисел, таких как 2+2=4. Кто теперь мешает мне ввести на этом наборе объектов, например, такой порядок: 0 < -1 < 1 < -2 < 2 < ...? Конечно, это не вписывается в наше традиционное понимание множества целых чисел. Но данный-то момент мы рассматриваем это множество не как набор чисел, а просто как какой-то набор элементов, которые лишь по привычке записываем как 0, 1, -1 и так далее.

Естественно, что множество целых чисел, упорядоченное тем способом, к которому мы привыкли, не является вполне упорядоченным. Но теорема Цермело и не утверждает, что всякое множество является вполне упорядоченным; она утверждает лишь, что на всяком множестве можно ввести такой порядок, который превратит его во вполне упорядоченное множество! Множество целых чисел нетрудно вполне упорядочить, например, введенным выше способом: $0 < -1 < 1 < -2 < 2 < \dots$.

Порядковый тип вполне упорядоченного множества называется трансфинитным числом. У читателя наверняка возник вопрос: а почему, собственно говоря, число? Трудно провести аналогию между свойствами, например, натуральных чисел и свойствами порядковых типов вполне упорядоченных множеств. Оказывается, что в определенном смысле с трансфинитными числами можно поступать примерно так же, как и с обычными числами; например, их можно складывать.

Сложение двух трансфинитных чисел происходит следующим образом: пусть α и β – два трансфинитных числа, A и B – два непересекающихся вполне упорядоченных множества, таких, что A имеет порядковый тип α, B имеет порядковый тип β. Образуем вполне упорядоченное множество $C = A \cup B$, порядок в котором образуем следующим образом. Пусть $c_1, c_2 \in C$. Если $c_1, c_2 \in A$ или $c_1, c_2 \in B$, то c_1 и c_2 сравниваются так же, как они сравнивались во множестве A или B. Если же $c_1 \in A$ и $c_2 \in B$, то скажем, что $c_1 < c_2$ (то есть в получившемся множестве сначала идут все элементы множества A, потом – все элементы множества B). Нетрудно видеть, что получившееся множество C является вполне упорядоченным, то есть ему соответствует некое трансфинитное число γ. Это число γ мы и будем считать суммой трансфинитных чисел α и β. Нетрудно видеть, что число γ не зависит от выбранных множеств A и B, а зависит лишь от α и β.

Обычно порядковых тип множества натуральных чисел обозначают ω, а порядковый тип множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначают просто n. Согласно определению получаем, что $n + \omega = \omega$, но $\omega + n \neq \omega$. Множество всех натуральных чисел, упорядоченное следующим способом:

$$1 < 3 < 5 < \dots < 2n - 1 < \dots < 2 < 4 < 6 < \dots$$

имеет порядковый тип $\omega + \omega$.

Пусть теперь A – вполне упорядоченное множество, $a \in A$. Тогда множество A можно представить в виде объединения двух множеств: $P = \{x \in A : x < a\}$ и $Q = \{x \in A : x \geqslant a\}$. В таком случае множество P будем называть отрезком множества A, а множество Q – остатком множества A.

Лемма 2.1. *Пусть A – вполне упорядоченное множество, $B \subseteq A$, $f : A \to B$ – подобное отображение. Тогда при каждом $a \in M$ имеем $a \leqslant f(a)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{A} = \{a \in A : f(a) < a\}$. Предположим, что множество $\tilde{A}$ непусто. Тогда в этом множестве есть наименьший элемент a. Пусть $f(a) = b$, $b < a$. Тогда $f(b) < f(a) = b$. Но тогда $b \in \tilde{A}$, что противоречит определению множества $\tilde{A}$.

Лемма 2.2. *Вполне упорядоченное множество не может быть подобно своему отрезку.*

Доказательство. Предположим, что множество A подобно своему отрезку B, определяемому элементу a. Соответствующее подобное отображение обозначим через f. Имеем $f(a) < a$, что противоречит предположению.

Научимся теперь сравнивать трансфинитные числа. Пусть α и β – два трансфинитных числа, A и B – множества, имеющих соответственно порядковые типы α и β. Будем говорить, что $\alpha = \beta$, если множества A и B подобны, $\alpha < \beta$, если множество A подобно некоторому отрезку множества B.

Убедимся, что введенное выше отношение порядка действительно является отношением порядка. Нетрудно видеть, что если α, β, γ – трансфинитные числа, то из неравенств $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$ вытекает $\alpha = \beta$ (иначе получилось бы, что некое вполне упорядоченное множество подобно своему остатку, что невозможно по лемме 2.2. Очевидно также, что если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$. Из последних утверждений также вытекает, что если α и β – трансфинитные числа, то из утверждений $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ может быть выполнено не более чем одно.

Покажем, что одно из трех утверждений обязательно выполнено. Для каждого трансфинитного числа α обозначим через $W(\alpha)$ множество всех трансфинитных чисел, меньших α. Множество $W(\alpha)$ само имеет тип α и, следовательно, само является вполне упорядоченным.

Пусть теперь α и β – два порядковых числа. Пусть $A = W(\alpha)$, $B = W(\beta)$ и $C = A \cap B$. Множество C вполне упорядочено, так как является подмножеством вполне упорядоченного множества A. Обозначим его тип γ.

Убедимся, что $\gamma \leqslant \alpha$. Действительно, если $A = C$, то $\gamma = \alpha$. Пусть $C \neq A$. Покажем, что в этом случае C является отрезком A. Действительно, пусть $\xi \in C$, $\eta \in A \setminus C$. Трансфинитные числа ξ и η являются сравнимыми, т. к. оба являются отрезками множества A. Если $\eta < \xi < \alpha$, то $\eta \in C$, что приводит нас к противоречию; тем самым $\xi < \eta$. Отсюда следует, что C – отрезок множества A и тем самым $\gamma < \alpha$.

Итак, $\gamma \leqslant \alpha$ и $\gamma \leqslant \beta$. Допустим теперь, что $\gamma < \alpha$ и $\gamma < \beta$. ... Приходим к противоречию.

Тем самым обязательно имеет место один и только один из трех следующих случаев: 1) $\gamma = \alpha = \beta$, тогда $\alpha = \beta$; 2) $\gamma = \alpha$ и $\gamma < \beta$, тогда $\alpha < \beta$; 3) $\gamma = \beta$ и $\gamma < \alpha$, тогда $\beta < \alpha$.

Итак, любые два трансфинитных числа сравнимы. Убедимся теперь, что не может быть такого, что A и B – некие множества, причем во множестве A нет подмножества, эквивалентного B, а во множестве B нет подмножества, эквивалентного A. Действительно, пользуясь теоремой Цермело, введем порядок на множествах A и B, превратив их тем самым во вполне упорядоченные множества. Множествам A и B соответствуют теперь два трансфинитных числа α и β. Если $\alpha = \beta$, то множества A и B эквивалентны. Если $\alpha < \beta$, то некий отрезок B эквивалентен A. Если $\beta < \alpha$, то некий отрезок A эквивалентен B. Тем самым мы разрешили недостаток, оставшийся в первой лекции, и убедились, что любые две мощности сравнимы между собой.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ И РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - Москва, "Наука". - 1976. - 543 с.

2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. / Ф. Хаусдорф. - Москва, Изд-во ЛКИ. - 2007. - 302 с.

3. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. / Н. Я. Виленкин. - Москва, Изд-во МЦНМО. - 2004. - 152 с.

4. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – Москва, Изд-во МЦНМО. - 2011. - 608 с.