ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Предел последовательности

Пусть a_n, $n \in \mathbb{N}$ – числовая последовательность. Скажем, что эта последовательность сходится к некоторому числу a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N_\varepsilon$ такое, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Поясним введенное определение. Зафиксируем некоторое положительное число ε и рассмотрим интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Такой интервал впоследствии (по понятным соображениям) будем называть ε-окрестностью числа a. Может случиться, что все члены рассматриваемой последовательности $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера, лежат в ε-окрестности числа a. Если последнее выполняется для любого числа $\varepsilon > 0$, то в этом случае мы говорим, что последовательность a_n сходится к числу a.

Если последовательность a_n сходится к числу a, то будем в таком случае писать $a_n \to a$ либо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Всякая последовательность, которая сходится к некоторому числу, называется *сходящейся.* Если последовательность не сходится ни к какому числу, то она называется *расходящейся.* Среди расходящихся последовательностей особо следует выделит те, которые стремятся к бесконечности.

Определение. Скажем, что последовательность a_n стремится к бесконечности (обозначается $a_n \to \infty$ либо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), если $\forall M > 0$ $\exists N$ такое, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $a_n \geqslant M$.

Чтобы изучить определение, исследуем на сходимость несколько совсем простых последовательностей.

Пример 1. Пусть $a_n = \frac{1}{n}$. Ясно, что $a_n \to 0$. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такой номер N, что $N > \frac{1}{\varepsilon}$ и, следовательно, $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ сразу при всех $n \geqslant N$. Это и означает, что последовательность a_n сходится к нулю.

Пример 2. Рассмотрим последовательность $1, 0, 1, 0, \ldots$. Иначе говоря, $a_n = 1$ при нечетных n и $a_n = 0$ при четных n. Покажем, что такая последовательность является расходящейся. Действительно, предположим, что $a_n \to a$. Ясно, что или $|a| \geqslant \frac{1}{2}$, либо $|a-1| \geqslant \frac{1}{2}$. Предположим, что $|a| \geqslant \frac{1}{2}$ и рассмотрим $\frac{1}{3}$-окрестность числа a, т. е. интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Все члены последовательности a_n, начиная с некоторого номера, должны лежать в этом интервале; но это, очевидно, не так, так как этот интервал не содержит числа 0. Аналогично рассуждаем в случае $|a - 1| \geqslant \frac{1}{2}$.

Впоследствии нам полезно будет следующее утверждение.

M**-лемма.** Пусть $M > 0$. Последовательность a_n сходится к числу a тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N_\varepsilon$ такое, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < M\varepsilon$.

Суть M-леммы заключается в том, что если ε – произвольное положительное число, то $M\varepsilon$ – также произвольное положительное число. Утверждая, что последовательность сходится к a, мы говорим, что для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого номера, лежат в ε-окрестности нуля; условие же M-леммы утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности, начиная с некоторого номера, лежат в $M\varepsilon$-окрестности нуля. Но, поскольку и ε, и $M\varepsilon$ означает произвольное положительное число, то эти два утверждения эквивалентны.

Тем не менее, докажем M-лемму строго. Итак, пусть $a_n \to a$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon_0 > 0$. Поскольку в определении сходящейся последовательности можно положить ε любым, то положим его равным $M\varepsilon_0$. Тогда найдется такое N, что $|a_n - a| < M\varepsilon_0$; а так как ε_0 – любое положительное число, то доказательство в одну сторону проведено.

Обратно, пусть выполнено условие M-леммы; покажем, что последовательность a_n является сходящейся. Пусть снова число $\varepsilon_0 > 0$ фиксировано. Так как в условии M-леммы число ε можно выбрать любым, положим его равным $\frac{\varepsilon_0}{M}$ и получим, что все элементы последовательности начиная с некоторого номера лежат в ε_0-окрестности числа a. Так как ε_0 произвольно, то последнее означает, что $a_n \to a$.

Отметим еще следующий важный факт: у последовательности не может быть более одного предела. В самом деле, предположим, что различные числа a и b являются пределами последовательности a_n. Положим $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$. Тогда ε-окрестности чисел a и b не пересекаются. При этом начиная с некоторого номера все члены последовательности a_n лежат как в ε-окрестности числа a, так и в ε-окрестности числа b, что невозможно.

Свойства сходящихся последовательностей.

1) Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$. В таком случае последовательность $c_n = a_n + b_n$ является сходящейся, причем ее предел равен $a + b$.

Действительно, $|c_n - a - b| = |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a| + |b_n - b|$. Если $\varepsilon > 0$, то найдется такой номер N, начиная с которого $|a_n - a| < \varepsilon$ и $|b_n - b| < \varepsilon$, и потому $|c_n - a - b| < 2\varepsilon$ при $n \geqslant N$. Согласно M-лемме $c_n \to a + b$.

2) Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$. В таком случае последовательность $c_n = a_n b_n$ является сходящейся, причем ее предел равен ab.

3) Пусть $a_n \to a$, причем $a_n \neq 0$ и $a \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

4) Пусть $a_n \to a$ и $b_n \to b$, причем $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Свойства 2)–4) попробуйте доказать самостоятельно.

5) Если $a_n \to a$ и $b_n \to b$, причем $a_n \leqslant b_n$ для любого n, то $a \leqslant b$.

Действительно, предположим, что при перечисленных условиях $a > b$. Положим $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$. Для некоторого n число a_n лежит в ε-окрестности числа a, а b_n лежит в ε-окрестности числа b. Очевидно, тогда $a_n > b_n$, что приводит к противоречию.

Обратите внимание, что при замене нестрогого знака на строгий свойство 5) не имеет места. Пусть, к примеру, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{n}$. Тогда $a_n < b_n$, но обе последовательности сходятся к числу 1. Иначе говоря, знак строгого неравенства при переходе к пределу может измениться на знак нестрогого неравенства.

6) **Лемма о двух полицейских.** Пусть a_n, b_n, c_n – три последовательности, причем $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $a_n \to d$, $c_n \to d$. Тогда $b_n \to d$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Начиная с некоторого номера числа a_n и c_n лежат в ε-окрестности числа d. Но поскольку $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, число b_n также лежит в ε-окрестности числа d. Тем самым $b_n \to d$, и лемма о двух полицейских доказана.

Рассмотрим теперь более содержательный пример.

Пример 3. Пусть $a_n = \frac{n^2+2n+2}{2n^2+6n+3}$. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$a_n = \frac{n^2+2n+2}{2n^2+6n+3} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}$. Поскольку $\frac{1}{n} \to 0$ и $\frac{1}{n^2} \to 0$, то согласно свойству 1) числитель рассматриваемой дроби стремится к 1, а знаменатель – к 2. По свойству 4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

2. Сумма ряда.

Пусть a_n – числовая последовательность. Рассмотрим выражение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, называемое *рядом.*

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Впоследствии числа S_n будем называть *частичными сум-*

мами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если последовательность S_n является сходящейся и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то скажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, что записывается следующим естественным образом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если же последовательность S_n является расходящейся, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также будем называть расходящимся.

Пример 1. Рассмотрим следующий ряд, который, как известно, называется *геометрической прогрессией*:

$$b + bq + bq^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} bq^n.$$

Предположим, что $|q| < 1$. Чтобы вычислить сумму геометрической прогрессии со знаменателем, не превосходящим по модулю 1, вычислим последовательность его частичных сумм: $S_n = b + bq + bq^2 + \cdots + bq^n = b\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Покажем, что $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Тем самым мы докажем хорошо известную формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \frac{b}{1-q}. \tag{1}$$

Чтобы провести доказательство строго, докажем для начала следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. Если $q > 1$, то $q^n \to \infty$.

Действительно, если $q > 1$, то $q^2 > q^1$. Кроме того, при всяком n $q^n - q^{n-1} = q^{n-2}(q^2 - q^1) > (q^2 - q^1)$, и следовательно, $q_n - q = q^n - q^{n-1} + q^{n-1} - q^{n-2} + \cdots + q^2 - q^1 \geqslant (n-1)(q^2 - q)$. Отсюда легко вытекает, что $q^n \to \infty$.

Лемма 2. Пусть $a_n \to \infty$. Тогда $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Если $a_n \to \infty$, значит, для любого $M > 0$ начиная с некоторого номера выполнено неравенство $a_n > M$ и, следовательно, неравенство $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}$. Поэтому $\frac{1}{a_n} \to 0$.

Из двух доказанных лемм вытекает, что если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$, и тем самым формула (1) доказана.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Чтобы исследовать этот ряд на сходимость, рассмотрим последовательность его частичных сумм $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

Начнем с того, что докажем ограниченность последовательности S_n. Покажем индукцией, что для любого натурального n выполняется неравенство $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$. Очевидно, что при $n = 1$ это неравенство выполнено. Осуществим теперь индукционный переход: если известно, что $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{k}$, то $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$.

Итак, последовательность S_n ограничена сверху числом 2, кроме того, она является возрастающей. Ниже мы докажем, что всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность является сходящейся; тем самым мы докажем сходимость интересующего нас ряда.

3. Точная верхняя грань числового множества.

Пусть M – некоторое числовое множество.

Определение. Число m называется *верхней гранью* множества M, если $m \geqslant a$ для любого $a \in M$.

Определение. Число m называется *точной верхней гранью* множества M, если оно является верхней гранью множества M и, кроме того, не превосходит любой другой верхней грани множества M.

Точная верхняя грань множества M часто называют еще *супремумом* и обозначается так: $\sup M$.

Поясним данное определение. Ясно, что у многих числовых множеств нет максимального элемента; в частности, у числового интервала $(0, 1)$. Понятие точной верхней грани – это понятие, похожее на максимум (нетрудно убедиться, что если у множества есть максимальный элемент, то он совпадает с точной верхней гранью), однако преимущество его в том, что точная верхняя грань имеется у любого множества, ограниченного сверху. Сформулируем этот результат в виде теоремы:

Теорема. У любого ограниченного сверху множества имеется точная верхняя грань.

Эту теорему дадим пока без доказательства.

А вот теперь

Теорема. Всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность является сходящейся.

Доказательство. Пусть последовательность a_n возрастает и ограничена сверху, и пусть $a = \sup\{a_n\}$. Покажем, что $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку a – точная верхняя грань последовательности a_n, то найдется такое натуральное K, что $a_K \geqslant a - \varepsilon$. Тогда при всех $n \geqslant K$ имеем $a - \varepsilon \leqslant a_K \leqslant a_n \leqslant a$, и тем самым начиная с номера K все элементы последовательности a_n лежат в ε-окрестности a. Поэтому $a_n \to a$.

Возвращаясь теперь к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, вспомним, что последовательность его частичных сумм возрастает, и при этом любая из них остается меньше 2. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится; более того, можно утверждать, что его сумма не превосходит 2, но вычислить эту сумму точно для нас пока очень трудно. В действительности сумма этого ряда равна $\frac{\pi^2}{6}$.