ЭКСПОНЕНТА

Представим следующую ситуацию. Пусть в нашем распоряжении сумма в 100 рублей, и имеется некий банк, в котором можно открыть счет. Предположим, что банк согласен начислять нам проценты не ежемесячно, а так часто, как мы потребуем (два раза за год, ежедневно, трижды в день и т.д.). Для простоты сделаем еще одно допущение, весьма далекое от истины: предположим, что банк предлагает нам 100% годовых. При этом банк известен нам как абсолютно честный. Зададимся вопросом, как часто нам нужно требовать начисления процентов для того, чтобы извлечь максимально возможную прибыль, и какую сумму мы сможем заработать.

Проследим, что происходит, когда мы требуем начисления процентов 1, 2, 3 раза в течение года:

1) если потребовать начисления процентов 1 раз, то в конце года сумма просто удвоится, и мы получим 200 рублей;

2) если потребовать начисления процентов 2 раза, то банк начислит нам проценты по истечении полугода, увеличив нашу сумму в 1,5 раза, и сделает еще раз то же самое в конце года; тем самым имеющаяся в нашем распоряжении сумма увеличится в $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ раза и составит 225 рублей;

3) наконец, если нам начислят проценты трижды в течение года, то наши сбережения увеличатся в $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{27}$ раза и составит 237 рублей 3 копейки.

Можно предположить, что чем чаще нам будут начислять проценты, тем больше мы заработаем. Убедимся, что это и в самом деле будет так. Нетрудно видеть, что потребовав начисления процентов n раз, мы увеличим наш капитал в $(1+\frac{1}{n})^n$ раз. Обозначим $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ и проследим за поведением последовательности a_n:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{n^2}C_n^2+\frac{1}{n^3}C_n^3+\dots+\frac{1}{n^n}C_n^n =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\dots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})+\dots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{n-1}{n}). \tag{1}$$

Из равенства (1) нетрудно вывести, что $a_n < a_{n+1}$. Действительно, если представить числа a_n и a_{n+1} в виде суммы (1), то сумма для числа a_n будет состоять из $n+1$ слагаемого, сумма для числа a_{n+1} – из $n+2$ слагаемых; кроме того, при каждом $k = 1, 2, \dots n+1$ k-ое слагаемое в сумме для a_n не превосходит k-ого слагаемого в сумме для a_{n+1}, так как

$$\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) < \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1}).$$

Тем самым можно утверждать, что чем чаще банк начисляет нам проценты, тем большую прибыль мы получаем. Продолжим изучение последовательности a_n, чтобы узнать, какую именно сумму мы можем заработать.

Из равенства (1) вытекает, что

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Поскольку последовательность a_n монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3, то она является сходящейся; ее предел обозначается e и называется *экспонентой*.

Как мы видели выше, число e напрямую связано с той прибылью, которую мы можем получить в нашем банке: а именно, мы не можем увеличить свой капитал в e раз, однако можем увеличить его в число раз, сколь угодно близкое к e. В связи с этим интересно попытаться вычислить число e с наибольшей возможной точностью. Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема. $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Доказательство. Обозначим $b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$. Надо показать, что $b_n \to e$. Как было показано выше, $b_n \leqslant 3\ \forall n \in \mathbb{N}$; кроме того, очевидно, что $b_n < b_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тем самым последовательность b_n является сходящейся. Кроме того, как мы доказали выше, $a_n < b_n$, поэтому, если $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $b \geqslant e$.

Предположим, что $b > e$. Тогда найдется b_N такое, что $b_K > e$. Пусть $b_K = e + 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Рассмотрим еще раз равенство (1). Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\dots+\frac{1}{K!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots(1-\frac{K-1}{n})\right) = b_K,$$

и поэтому найдется такое N, большее K, что

$$b_K - \left(1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{N})+\dots+\frac{1}{K!}(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\dots(1-\frac{K-1}{N})\right) \leqslant \varepsilon.$$

Но в таком случае

$$a_N > \left(1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{N})+\dots+\frac{1}{K!}(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})\dots(1-\frac{K-1}{N})\right) > e,$$

что невозможно, так как a_n сходится к экспоненте, монотонно возрастая. **Теорема доказана.**

Выясняется, что полученное представление экспоненты можно использовать для того, чтобы вычислить экспоненту с достаточной точностью, поскольку справедлива следующая

Теорема. Для любого натурального n выполнено неравенство

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < e < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}.$$

Доказательство. Поскольку левая часть неравенства уже доказана нами ранее, докажем его правую часть.

$$e-1-1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\dots-\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots\right) <$$

$$< \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\frac{1}{(n+1)^3}+\dots\right) = \frac{1}{n!n},$$

откуда следует правая часть неравенства. **Теорема доказана.**

Теперь ясно, как вычислить экспоненту с подходящей точностью. К примеру, если мы хотим вычислить экспоненту до девятой цифры после запятой, подберем такое

n, что $\frac{1}{n!n} < 10^{-9}$. Достаточно взять $n = 12$. Из предыдущей теоремы вытекает, что, вычислив сумму $1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{12!}$, мы получим достаточно хорошее приближение экспоненты. Мы увидим, что $e \approx 2,718281828...$. Тем самым, если в нашем распоряжении 100 рублей, то наибольшая сумма, которую мы можем заработать в описанном банке, равна 271 рублям 82 копейкам.

Докажем еще одно свойство экспоненты.

Теорема. Экспонента – иррациональное число.

Доказательство. Пусть $e = \frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда для любого натурального n выполнено равенство

$$n!a = n!be = n!b\left(1+1+\frac{1}{2!}+\dots\right),$$

из которого вытекает, что число $n!b\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\right)$ при любом натуральном n является целым. Однако, как доказано выше,

$$0 < n!b\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\right) < \frac{b}{n},$$

поэтому при $n > b$ число $n!b\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\right)$ не является целым. **Теорема доказана.**