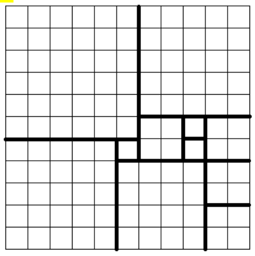
1. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 11×11. Сможете ли Вы разрезать этот квадрат по линиям сетки на 11 меньших квадратов? (Квадраты могут быть различных размеров.)

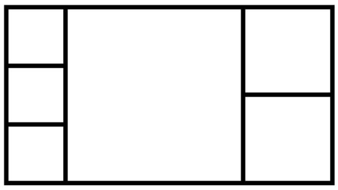
Решение. Вот один из вариантов разрезания:



2. Найдите двадцать необязательно различных натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.

Решение. Подойдут, например, следующие числа: 20, 2 и восемнадцать единиц.

3. Найдите площадь прямоугольника, составленного из квадратов (см. рис.), если его периметр 34 см.



Решение. Обозначим сторону наименьшего квадрата за 2х. Тогда ширина прямоугольника 6х. Значит сторона среднего по размеру квадрата равна 3х. Тогда длина прямоугольника равна 2х+6х+3х=11х. тогда периметр прямоугольника равен (6х+11х)·2=34х=34. Откуда х=1. Значит ширина прямоугольника 6 см, а длина 11 см. Значит площадь прямоугольника 66 см^2.

4. Числа a и b таковы, что значения выражений $a + 8$ и $35 - 3b$ делятся на 11. Верно ли, что тогда и сумма чисел $a + b$ делится на 11? (Ответ обосновать.)

Решение. Из второго выражения вычтем утроенное первое, имеем: $(35 - 3b) - 3(a + 8) = -3(a + b) + 11$, которое тоже делится на 11, значит $3(a + b)$ делится на 11, но 3 не делится на 11, значит, $(a + b)$ делится на 11.

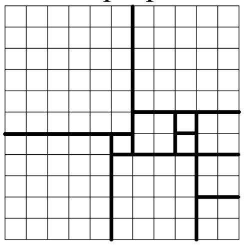
5 У фальшивомонетчика есть 100 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая из фальшивых монет на 1 грамм легче каждой из настоящих. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 25 настоящих монет?

Первое решение. Разобьем монеты на 2 группы по 50 монет; положим на одну чашу весов первую группу монет, а на вторую чашу – вторую группу. Если весы не оказались в равновесии, то все 50 монет, лежащие на более тяжелой чаше, являются настоящими. Предположим теперь, что весы уравновесились. Тогда на каждой чаше весов лежит по одной фальшивой монете. Возьмем 50 монет с одной из чаш, разобьем эти монеты на 2 группы по 25 монет, положим 25 монет из первой группы на одну чашу весов, а 25 монет из другой группы – на вторую чашу. 25 монет, оказавшихся в более тяжелой группе, являются настоящими.

Второе решение. Выберем две группы по 25 монет и взвесим. Возможны два случая. 1) Если весы не находятся в равновесии, то в более тяжелой группе все монеты настоящие (в более легкой группе могут находится одна или две фальшивые, а вот в более тяжелой фальшивых точно нет!). Как видим, в этом случае хватает даже одного взвешивания. 2) Если весы в равновесии, то либо в каждой из кучек ровно по одной фальшивой, либо в обеих кучках все настоящие монеты. Осталось понять, какой из вариантов получился на самом деле. Взяв любую из этих кучек и взвесив ее с новой группой из 25 монет, получаем: если равновесия нет, то в более тяжелой кучке – обе монеты настоящие; если опять равновесие, то в обеих этих кучках (и даже во всех трех выбранных кучках) настоящие монеты.

1. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 11×11. Сможете ли Вы разрезать этот квадрат по линиям сетки на 11 меньших квадратов? Можно ли так выполнить разрезание, чтобы все получающиеся квадраты были попарно различных размеров?

Решение. Разрезать на квадраты попарно различных размеров невозможно из того, что тогда должен присутсвовать квадрат 11 на 11. Один из вариантов разрезания:



2. Двадцать корзин с яблоками расставили по кругу. Можно ли разложить в эти корзины 99 яблок так, чтобы количество яблок в любых двух соседних корзинах отличалось ровно на 1? (Ответ обосновать.)

Ответ: нельзя. ***Решение.*** Заметим, что сумма количеств яблок в любых двух соседних корзинах нечетная. Но тогда, 20 корзин – это 10 пар стоящих рядом корзин, а сумма 10 нечетных чисел четная.

3. На плоскости даны 6 прямых так, что среди них нет ни одной пары параллельных прямых и никакие три прямые не проходят через одну точку. На сколько частей эти прямые разобьют плоскость?

Ответ: 22. ***Решение.*** Пока нет прямых вся плоскость – это одна часть. После проведения 1-й прямой станет 2 части. После проведения 2-й прямой добавится две части и станет 4. После проведения третьей прямой станет еще на три части больше, т.е. 7 частей. Далее заметим, что при проведении очередной прямой – она (эта прямая) пересечет все предыдущие прямые и сама точками пересечения разобъется на такое количество частей (отрезков и двух лучей), сколько прямых уже было проведено до нее плюс еще одна, а каждая такая часть прямой, разделяя некоторую часть плоскости, добавляет к общему числу частей плоскости ровно одну часть. Итого общее количество частей будет: 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 22.

4. В комнате было 32 стула: желтые и синие. На каждом стуле сидит или рыцарь, или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут. Каждый заявил: «Я сижу на синем стуле». После этого некоторые люди пересели и теперь ровно половина заявили, что сидят на синем стуле, и половина, что на желтом. Сколько рыцарей теперь сидят на желтых стульях?

Ответ: 8 рыцарей сидит на желтых стульях.

Решение. Раз все заявили, что сидят на синих стульях, значит все рыцари сидят на синих стульях, а лжецы на желтых. Теперь если какое-то количество рыцарей пересели на желтые стулья, то такое же количество лжецов должно пересесть на синие стулья. И те, и другие говорят, что сидят они на желтых стульях. Вместе их 32/2=16. Значит рыцарей на желтых стульях теперь 16/2=8.

5. На планете «ДВОЕЧНИК» всего три цифры: 1, 2 и 3. Если из любого числа выкинуть стоящие подряд наборы цифр $\overline{123}$, $\overline{231}$ или $\overline{312}$, то смысл числа не изменится, т.е. полученное число будет равно исходному. Точно так же не изменится смысл числа (не изменится значение), если добавить в любое место исходного числа – наборы цифр $\overline{321}$, $\overline{112233}$ или $\overline{332211}$. Лучшие математики этой планеты считают, что $\overline{12312312} = \overline{32132132}$. С планеты «ОТЛИЧНИК» прилетела делегация, которой предложено доказать или опровергнуть этот пример (т.е. $\overline{12312312} = \overline{32132132}$). Помогите делегации с планеты «ОТЛИЧНИК».

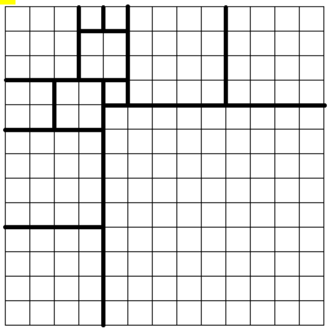
Ответ: равенство не верно. ***Решение.*** Предположим, что этот пример правильный. Тогда из числа $\overline{12312312}$ к числу $\overline{32132132}$ можно перейти путем нескольких преобразований, описанных в условии. При каждом из этих преобразований добавляется или убирается одинаковое число цифр 1, 2 и 3. Таким образом, попарная разность между количеством цифр 1, 2 и 3 сохраняется (т.е. является инвариантом рассматриваемого преобразования). Однако в числе $\overline{12312312}$ цифр 3 на одну меньше, чем цифр 1, а в числе $\overline{32132132}$ цифр 1 на одну 1 меньше, чем цифр 3. Это противоречит нашему предположению.

VI Минская городская Интернет-олимпиада по математике – 2019

7 класс - РЕШЕНИЯ

1. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 13×13. Сможете ли Вы разрезать этот квадрат по линиям сетки на 12 меньших квадратов?

Решение. Одно из возможных разрезаний:



2. Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ и $k^2 + 4k$ (n и k – натуральные числа) равняться: а) 2018; б) 2019?

Ответ. а) Нет. б) Да.

Решение. а) Рассмотрим разность $(n^2-4n)-(k^2-4k)=n^2-k^2+4k-4n.$ Число $4k-4n$ кратно 4, а число $n^2-k^2=(n-k)(n+k)$ является произведением двух множителей одной и той же четности и поэтому или делится на 4, или является нечетным. Следовательно, число $(n^2-4n)-(k^2-4k)$ или кратно 4, или является нечетным.

Несколько другое рассуждение основано на разложении, которое дано в п. б): исходная разность равна произведению $(n - k)\cdot(n + k - 4)$, в котором оба сомножителя одной четности, и тогда произведение либо нечетно, либо делится на 4, а $2018 = 2\cdot 1009$.

б) Имеем

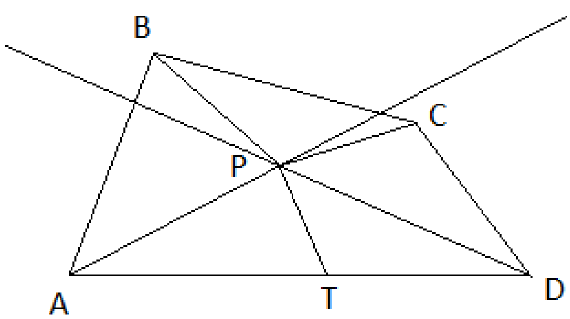
$$(n^2-4n)-(k^2-4k)=n^2-k^2+4k-4n=(n-k)(n+k)-4(n-k)=$$
$$(n-k)(n+k-4)=2019=3\times 673.$$

Искомые n и k можно подобрать, решая систему $\begin{cases} n-k=3 \\ n+k=677 \end{cases}$,

из которой легко находим $n = 340$, $k = 337$. Этого достаточно, ибо в задаче не требуется найти все подходящие пары n и k, а только проверить, что равенство возможно.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено условие $AD = AB + CD$. Биссектрисы углов BAD и ADC пересекаются в точке P, лежащей внутри четырехугольника ABCD. Докажите, что $BP = CP$.

Решение. Отметим на AD такую точку T, что AT=AB, TD=CD. Мы можем это сделать из-за того, что сумма сторон равна третьей стороне: $AD = AB + CD$. Тогда по первому признаку треугольники APB и APT равны, а значит BP=PT. Аналогично по первому признаку равны треугольники DPT и DPC, а значит PC=PT, откуда и следует равенство BP=PC, которое необходимо доказать.



4. Несколько мальчиков помогали Деду Морозу нести подарки на новогодний праздник. Каждый из мальчиков нес по три подарка, а остальные подарки Дед Мороз вез на санях. Все подарки Дед Мороз разделил поровну между всеми этими мальчиками и 27-ю девочками. Сколько могло быть мальчиков, если на санях у Деда Мороза был 181 подарок?

Ответ: 73 или 23 мальчика.
Первое решение. Пусть каждый ребенок получил по n подарков, а всего мальчиков было x. Тогда имеем равенство 3x+181=n(x+27). Т.к. при n<4 всегда 27n<181, то правая часть равенства меньше левой, а при n>6 всегда 6n>181 и тогда уже левая часть меньше правой. Осталось проверить значения n в этом диапозоне:
n=4: 3x+181=4(x+27) => x=181-4·27=73 мальчика
n=5: 3x+181=5(x+27) => 2x=181-5·27=46 => x=46/2=23 мальчика
n=6: 3x+181=6(x+27) => 3x=181-6·27=19 => x=19/3 – не целое число, значит случай невозможен.

Второе решение. Воспользуемся обозначениями и равенством, из первого решения: 3x+181=n(x+27). Отсюда $n = \frac{3x+181}{x+27} = 3 + \frac{100}{x+27}$. То есть 100 должно делиться на x + 27 нацело, а это возможно лишь при x = 23 или x = 73.

5. Дана схема улиц города, на которой все перекрестки обозначены цифрами от 1 до 9 (см. рис.). Опытный водитель снегоочистительной машины заметил, что он может, начав с некоторого перекрестка и проехав по каждой улице города ровно по одному разу, закончить уборку снега на том перекрестке, где находится гараж. Найдите, с какого перекрестка должен в таком случае начать работу водитель и на каком перекрестке находится гараж? Сколько решений имеет эта задача?
Ответ: два решения: можно начать на перекрестке 2, а гараж тогда находится на перекрестке 6, либо наоборот..
Решение. Заметим, что если водитель стартует из перекрестка, из которого выходит (или входит) четное число улиц, то на таком перекрестке он должна и завершить свой путь (ибо при любом пследующем попадании на этот перересток всегда будет еще улица, по которой водитель еще не проехал, ввиду четности числа входящих-выходящих улиц).

В то же время в городе есть два перекестка с нечетным числом выходящих улиц (2-й и 6-й). Именно на на одном из них нужно стартовать или заканчивать маршрут, ибо в виду нечетности входящих-выходящих дорог через них нельзя все время проезжать транзитом. Значит, один из них должен быть начальным, а второй конечным для снегоочистительной машины, либо наоборот.