

1. Является ли число  $2019^{20} + 4$  простым? Ответ обоснуйте.

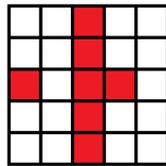
**Ответ:** нет. **Решение.** Достаточно заметить, что в степенях числа 2019 последовательно чередуются последние цифры: 9, 1, 9, 1, 9, ... . Причем, если степень четная, то последняя цифра – 1. А значит, указанное число заканчивается на 5 и больше 5, поэтому оно составное.

2. Петя купил большой альбом для рисования с пронумерованными страницами, начиная с 1 (как в обычной книге). Для оформления класса к конкурсу КВН он поделился с Васей частью листов альбома, вырвав из него кусок (часть, состоящую из подряд идущих листов), первая страница которого была под номером 231, а номер последней страницы состоял из тех же цифр, но в каком-то другом порядке. Сколько листов вырвал Петя? (Рассмотрите и обоснуйте все возможности.)

**Ответ:** 41 лист. **Решение.** Ясно, что номер последней страницы начинается с цифры 3 и должен быть четным, т.е. 312. Значит, число страниц в вырванном куске 82, но на каждый лист содержит в себе две страницы, значит листов вырвано 41.

3. Какое наименьшее количество клеточек нужно закрасить в квадрате  $5 \times 5$ , чтобы в любом квадрате  $3 \times 3$  было 4 закрашенных клеточек? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** 7 клеточек. **Решение.** Пример



Рассмотрим, два противоположных квадрата  $3 \times 3$ . В каждом из них по 4 закрашенных клеток и лишь одна клетка общая, значит меньше  $4+4-1=7$  клеток закрасить невозможно.

4. В сумме, состоящей из двух или более слагаемых, все цифры и знаки плюс зашифровали буквами и получили слово МАТЕМАТИКИМЫ. Какое максимальное значение могло быть у этого выражения? (Одинаковые цифры и знаки зашифрованы одинаковыми буквами, разные – разными.)

**Ответ:** 98770469. **Решение.** Для того, чтобы сумма была максимальна необходимо, чтобы в слагаемом было как можно больше цифр. Всего в слове 12 букв. М и Ы не могут быть "+" т.к. стоят в начале и в конце. Если "А" - это знак "+", то одно из слагаемых шестизначное, "И" – семизначное, "Е" или "К" - восьмизначное, а "Т" пятизначное. Значит "+" это Е или К. Сравним выражения МАТ+МАТИКИМЫ или МАТЕМАТИ+ИМЫ. Понятно, что, чтобы получить максимальную сумму надо большие цифры ставить в порядке убывания в начало длинного слова. В итоге в первом случае  $987+98765694=98766681$ , а во втором  $98769875+594 = 98770469$ . Во втором варианте число больше.

5. Винтик выписал в произвольном порядке числа от 1 до 10, затем Шпунтик под каждым числом написал его порядковый номер, начиная с 1, после чего Знайка сложил каждое число с номером места, на котором оно стоит. А Незнайка сказал, что у всех получившихся у Знайки чисел стоящие на конце цифры различны. Прав ли Незнайка? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** нет. **Решение.** Всего имеются 10 сумм и 10 возможностей для последней цифры числа. Пусть условие задачи не выполнено. Тогда среди последних цифр сумм встречаются все десять цифр 0, 1, 2, ..., 9. Из этого следует, что сумма всех десяти сумм оканчивается той же цифрой, что и сумма  $1+2+\dots+9=45$  (на последнюю цифру влияет только сумма последних цифр). Однако сумма всех сумм равна  $2(1+2+3+\dots+10)=110$ , что оканчивается на 0. Полученное противоречие доказывает, что хотя бы у двух сумм стоит на конце одна и та же цифра

1. Является ли число  $2018^{2020} + 9$  простым? Ответ обоснуйте.

**Ответ:** нет. **Решение.** Достаточно заметить, что в степенях числа 2018 последовательно чередуются последние цифры: 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, 8, ... . Причем, каждая четвертая степень (4-я, 8-я, ..., 2020-я) заканчивается на 6. А значит, указанное число заканчивается на 5 и больше 5, поэтому оно составное.

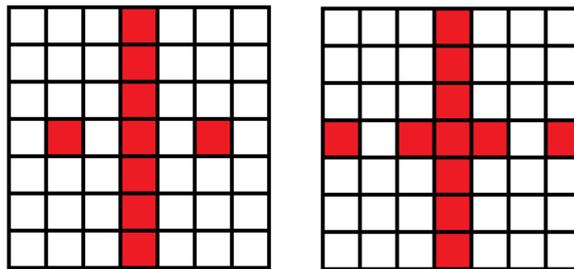
2. Все стороны и диагонали шестиугольника покрасили в красный или зеленый цвет. Докажите, что какие-то три вершины этого шестиугольника с соединяющими их отрезками (сторонами или диагоналями) образуют треугольник со сторонами одного цвета.

Считайте, что все диагонали шестиугольника целиком располагаются внутри него.

**Доказательство.** Выберем любую вершину, обозначим ее А. Из нее выходят 5 отрезков, три из которых, очевидно одного цвета. Не теряя общности пусть зеленого цвета. Обозначим вторые концы этих – зеленых отрезков через В, С и D. Теперь возможны два варианта. Либо хотя бы один из отрезков ВС, СD или ВD зеленый и тогда он вместе с зелеными отрезками, проведенными из вершины А образует “зеленый” треугольник. Либо все они красные, и тогда они образуют “красный” реугольник.

3. Какое наименьшее количество клеточек нужно закрасить в квадрате  $7 \times 7$ , чтобы в любом квадрате  $4 \times 4$  было а) 5 закрашенных клеточек; б) 6 закрашенных клеточек?

**Ответ:** а) 9 клеточек; б) 11 клеточек. **Решение.** Примеры



Рассмотрим, два противоположных квадрата  $4 \times 4$ . В каждом из них по 5 (6) закрашенных клеток и лишь одна клетка общая, значит меньше а)  $5+5-1=9$  клеток б)  $6+6-1=11$  клеток закрасить невозможно.

4. В выражении  $x + y - z$  все цифры и знаки арифметических действий зашифровали буквами (одинаковые цифры и знаки – одинаковыми, разные – разными) и получили слово МАТЕМАТИКА. Какое максимальное значение могло быть у этого выражения?

**Ответ:** 10855. **Решение.** М и А не могут быть знаками арифметических действий т.к. стоят в начале и в конце. И и К не "+", потому, что невозможно после них вставить знак "-". Если Т означает "+", то имеем МА+ЕМА+И-А, а значит это выражение меньше 1100. Если Е – это "+", то имеем МАТ+МАТИ-А (понятно, что лучше отнять однозначное число, а не двузначное) и это выражение может иметь значение больше чем 1100. Понятно, что, чтобы получить максимальную сумму надо большие цифры ставить в начало длинного слова. В итоге  $987+9876-8=10855$ .

5. а) В вершинах шестиугольника записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 (именно в таком порядке). За один ход разрешено выбрать две соседние вершины и к числам, стоящим в данных вершинах, одновременно прибавить единицу или одновременно вычесть из них единицу. Можно ли получить в итоге шесть чисел в таком порядке: 5 5 5 5 5 8?

б) А в таком порядке 5 5 5 5 7 ?

в) А в таком порядке 2 1 3 4 5 6 ?

**Ответ:** а) да, б) нет, в) нет. **Решение.** а) можно, см., например, такой «алгоритм»:

1 2 3 4 5 6  
 5 6 3 4 5 6  
 5 5 2 4 5 6  
 5 5 5 7 5 6  
 5 5 5 5 3 6  
 5 5 5 5 5 8;

б) нельзя, так как сумма всех исходных чисел нечетная, а конечных – четная; в то же время ясно, что выполнение описанных операций не меняет четности суммы всех чисел;

в) нельзя, так как сумма первого, третьего и пятого чисел в исходной расстановке равна 9, а сумма второго, четвертого и шестого равна 12 и положительная разность между ними равна 3; в то же время в конечной расстановке эти суммы соответственно равны 10 и 11, и положительная разность между ними равна 1. Аналогично пункту б) выполнение описанных операций не меняет рассматриваемой разности

## VII Минская городская Интернет-олимпиада по математике – 2020

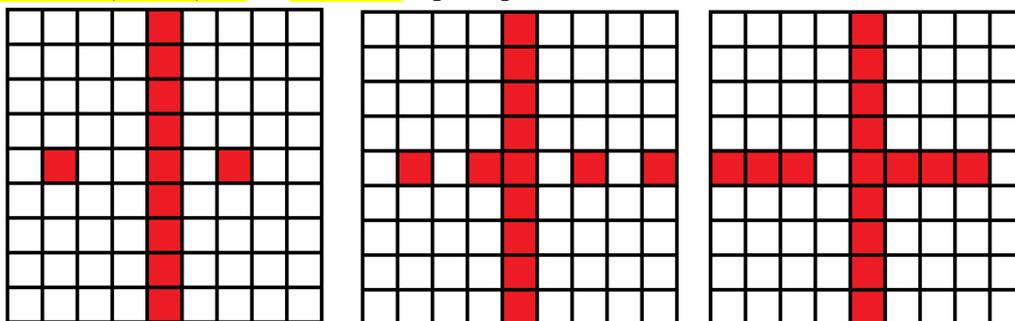
### **7 класс**      **РЕШЕНИЯ**

1. Можно ли представить число 2020 в виде разности квадратов двух целых чисел?

**Ответ: да. Решение.** Из равенства  $2020 = n^2 - k^2 = (n - k)(n + k)$  легко получить систему уравнений для разности и суммы  $n$  и  $k$ , равных например 2 и 1010, которая, как легко видеть, имеет решение в натуральных числах (предлагаем школьникам самим выполнить эти действия).

2. Какое наименьшее количество клеточек нужно закрасить в квадрате  $9 \times 9$ , чтобы в любом квадрате  $5 \times 5$  было: а) 6 закрашенных клеточек; б) 7 закрашенных клеточек; в) 8 закрашенных клеточек?

**Ответ.** а) 11 клеточек; б) 13; в) 15. **Решение.** Примеры



Рассмотрим, два противоположных квадрата  $5 \times 5$ . В каждом из них по 6 (6 или 7) закрашенных клеток и лишь одна клетка общая, значит меньше а)  $6+6-1=11$  клеток б)  $7+7-1=13$  в)  $8+8-1=15$  клеток закрасить невозможно.

3. В выражении все цифры и знаки арифметических действий зашифровали буквами (одинаковые цифры и знаки – одинаковыми, разные – разными) и получили слово МАТЕМАТИКА. Коля помнит, что среди арифметических действий были только "+" и "-" (и тот, и другой присутствовали, но, возможно, какой-то из знаков был использован более одного раза). Какое максимальное значение могло быть у этого выражения?

**Ответ:** 10855. **Решение.** М и А не могут быть знаками арифметических действий т.к. стоят в начале и в конце. Если Т - "+", то имеем МА+ЕМА+И-А, а значит это выражение меньше 1100. Если Е - "+", то имеем МАТ+МАТИ-А (понятно, что лучше отнять однозначное число, а не двузначное) и это выражение может иметь значение больше чем 1100. Если И или К "+", то где-то впереди "-" и это Т или Е и тогда мы будем отнимать достаточно большое число. Понятно, что, чтобы получить максимальную сумму надо большие цифры ставить в начало длинного слова. В итоге  $987+9876-8=10855$ .

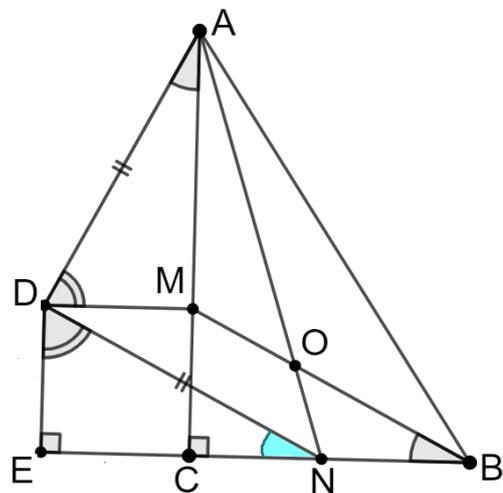
4. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $AC$  больше катета  $BC$ , но меньше удвоенного катета  $BC$ . На катете  $AC$  отмечена точка  $M$  так, что  $AM = BC$ , а на катете  $BC$  – точка  $N$  так, что  $BN = MC$ . Найдите угол между прямыми  $AN$  и  $BM$ .

**Ответ:**  $45^\circ$ .

**Решение.** Пусть прямые  $AN$  и  $BM$  пересекаются в точке  $O$ , тогда угол  $AOM$  – искомый.

Вне треугольника  $ABC$  построим квадрат  $CEDM$ . Тогда  $EN = CE + CN = CN + CM = CN + NB = CB$ . Значит, прямоугольные треугольники  $EDN$ ,  $CMB$  и  $MDA$  равны по двум катетам ( $DE = MC = DM$  и  $EN = CB = MA$ ). Следовательно,  $ND = AD$  и  $\angle EDN = \angle MDA$ . Тогда  $\angle ADN = \angle MDE = 90^\circ$ .

Таким образом, треугольник  $AND$  – равнобедренный и прямоугольный, значит,  $\angle AND = 45^\circ$ . Кроме того, из равенства треугольников следует, что  $\angle DNE = \angle MBC$ , поэтому  $BM \parallel ND$ . Тогда  $\angle AOM = \angle AND = 45^\circ$ .



5. Найдите все возможные тройки цифр  $(a, b, c)$  таких, чтобы выполнялось равенство:

$\overline{abc} = (\overline{ab})^2 - c^2$ , если известно, что цифры необязательно различны, значение любой из них может быть равным 0, а запись  $\overline{abc}$  означает число, необязательно трехзначное, состоящее из цифр  $a, b, c$  в указанном порядке.

**Ответ:** три тройки:  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  и  $(1, 4, 7)$ . **Решение.** Перепишем уравнение в виде:

$$10 \cdot \overline{ab} + c = (\overline{ab})^2 - c^2 \quad \text{или} \quad (\overline{ab} - 5)^2 = c(c + 1) + 25.$$

Переменная  $c$  может принимать значения от 0 до 9. Простым перебором убеждаемся, что правая часть последнего равенства является квадратом целого числа только при  $c = 0$  и при  $c = 7$ .

Если  $c = 0$ , то как легко видеть,  $\overline{ab}$  либо 0, либо 10, откуда два первых ответа.

Если  $c = 7$ , то получим только один вариант:  $\overline{ab} = 14$ .