IX Минская городская Интернет-олимпиада по математике
Очный тур, 19 февраля 2022 года

5 класс - РЕШЕНИЯ *(время выполнения 3 часа = 180 мин)*

1. От старта до финиша по всей трассе на одинаковом расстоянии друг от друга расставлены флажки – всего 25 флажков, считая флажки на старте и на финише. Спортсмен пробегает расстояние от первого до седьмого флажка за 30 секунд. За какое время он пробежит всю дистанцию, если считать, что он все время бежит с одинаковой скоростью? Ответ обоснуйте.

Ответ: 120 сек = 2 мин.

Решение. Между 1-м и 7-м флажком 6 интервалов, между 1-м флажком (**стартом**) и 25-м флажком (**финишем**) 24 интервала.

6 интервалов спортсмен пробегает за 30 сек, значит 24 интервала пробежит за 120 сек = 2 мин.

2. У барона Мюнхгаузена в саду есть прекрасная липовая аллея: длинная прямая дорожка, вдоль которой растут липы (все с одной стороны дорожки). Барон распорядился, чтобы садовники посадили между каждыми двумя соседними липами еще по одной липе. Затем еще раз – между каждыми двумя соседними липами (старыми и вновь посаженными) еще по одной липе. И так несколько раз. Барон утверждает, что после каждой «посадки» вдоль дорожки всегда будет стоять нечетное число лип. Прав ли он? Ответ объясните.

Ответ: прав.

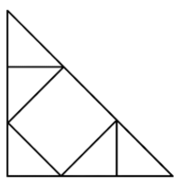
Решение. Если в начале в аллее было четное число лип, то добавиться нечетное (а именно: число промежутков между липами) и станет нечетное.

Если в начале в аллее было нечетное число лип, то добавиться четное, и снова станет нечетное. Уже после первого «высаживания» в аллее станет нечетное число лип и далее всегда будет нечетное.

3. Квадрат разрезали по диагонали. Можно ли один из таких получившихся треугольников разрезать на 5 одинаковых треугольников и квадрат? Если да, то нарисуйте как, если нет – объясните почему.

Ответ: да, можно.

Решение. См. рисунок.



4. Известно, что одна десятая часть от некоторого положительного числа А больше, чем одна девятая от другого положительного числа Б. Верно ли, что половина числа А больше, чем восемь пятнадцатых от числа Б? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Первое решение: одна десятая часть от некоторого положительного числа А больше, чем одна девятая от другого положительного числа Б, следовательно, А > 10/9·Б > Б. Но тогда:

- три десятых от положительного числа А больше, чем три девятых от Б,
- одна пятая от числа А больше, чем одна пятая от Б,
- осталось сложить полученные два неравенства.

Второе решение: из условия следует, что пять десятых от положительного числа А больше, чем пять девятых от Б; осталось показать, что 5/9 > 8/15, а приведя дроби в этом неравенстве к общему знаменателю, получим очевидное: 25/45 > 24/45.

5. Как, используя 18 цифр «2», знаки арифметических действий и скобки, получить число 2022?

Первое решение, *основанное на разложении числа на множители*: 2022 = $2 \cdot 3 \cdot 337 = 2 \cdot 3 \cdot (336 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 2{:}2) \cdot$
$(2 \cdot (2 \cdot 2 - 2{:}2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 - 2{:}2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2{:}2)$

Второе решение, *основанное на ближайшей к числу* 2022 *степени числа* 2**:**
$2^{11} = 2048$, тогда 2022 = 2048 – 26 = 2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 – 2 – 24 =
2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 – 2 – 8·3 = 2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 – 2 – 2·2·2·(2 + 2:2).

Третье решение, *основанное на ближайшем к числу* 2022 *числа* 2 *из двоек*:
2022 = 2222 – 200 = 2222 – 2·2·2·25 = 2222 – 2·2·2·(24+1) =
= 2222 – 2·2·2·(2·2·2·(2 + 2:2) + 2:2) = (*не хватает трех двоек*) =
= 2222 – 2·2·2·(2·2·2·(2 + 2:2) + 2:2) + (2 – 2)·2.

6. Решения задач олимпиады хранятся в сейфе, код к которому состоит из числовой части – четырёх не обязательно различных цифр от 0 до 9 – и следующей за ней буквенной части – трёх любых различных букв русского алфавита. Известно, что в коде к сейфу точно нет числа 2022 и нет сочетания букв ЮНИ. Сколько различных кодов нужно перебрать, чтобы наверняка (т.е. даже в «худшем» случае) открыть сейф?

Ответ: 32702265.

Решение. Подсчитаем сначала количество вариантов числовой части кода. Любая из четырёх цифр может быть выбрана 10 способами, тогда всего возможных числовых комбинаций 10^4=1000. Но одна из этих комбинаций точно не может быть использована. Тогда остаётся 1000-1=999 числовых комбинаций. Теперь посчитаем буквенные комбинации. Буквы не должны повторяться, значит после выбора первой буквы из 33, вторую букву будем выбирать уже из 32, а третью – из 31. Всего возможных буквенных комбинаций: 33·32·31=32736. Но одна из этих комбинаций использоваться не может. Тогда остаётся 32736-1=32735 буквенных комбинаций. Поскольку в коде любая числовая комбинация может сочетаться с любой буквенной, то всего возможных кодов для сейфа: 32735·999=32702265.

IX Минская городская Интернет-олимпиада по математике

Очный тур, 19 февраля 2022 года

6 класс - РЕШЕНИЯ

1. Король со свитой двигаются из пункта А в пункт Б со скоростью 5 км в час. Каждый час король высылает гонцов в Б, которые двигаются со скоростью 20 км в час. С какими временными интервалами прибывают гонцы в пункт Б?

Ответ: 45 мин.

Первое решение: Каждый гонец стартует на 1 час позже предыдущего, однако ехать ему нужно на 5 км меньше чем предыдущему, а 5 км каждый гонец проезжает за ¼ часа = 15 мин. Отсюда получаем временной интервал между гонцами: 1 час – 15 мин = 45 минут.

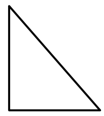
Второе решение. Любой гонец, отправленный королем, за час удаляется от него на 15 км. Значит, расстояние между эти и следующим гонцом составляет 15 км. Скорость каждого гонца – 20 км/час, поэтому 15 км гонец проходит (или проезжает) за 45 мин. Следовательно, гонцы будут прибывать в Б через каждые 45 минут.

2. Миша и Егор играют в следующую игру: у каждого из них есть по 21 карточке с натуральными числами от 1 до 21. Они по очереди выкладывают карточки на стол. Первую выкладывает Миша, затем Егор (*все выложенные карточки все время видны*). После каждой пары ходов Миши и Егора подсчитывается сумма чисел, написанных на выложенных во время этих ходов карточках. После того как все карточки выложены, подсчитывается произведение всех 21 полученных сумм. Если полученное произведение будет четно, то выигрывает Миша, в противном случае – Егор. Может ли Егор гарантировать себе выигрыш? Ответ объясните.

Ответ: нет.

Решение. Всего 11 нечетных и 10 четных чисел у каждого. Чтобы общее произведение было нечетным необходимо чтобы сумма чисел при каждом ходе была нечетной, т.е. при каждом ходе должны складываться нечет+чет, но тогда все числа должны разбиваться на такие пары. Это невозможно, так как всего 22 нечетных и 20 четных числа.

3. У Пети и Вовы есть 40 картонных равных равнобедренных прямоугольных треугольников (см. рис.). Петя и Вова по очереди составляют из них квадраты (при составлении квадрата не обязательно использовать все треугольники). Сначала Петя берет все 40 треугольников и строит из некоторых из них квадрат. Потом Вова берет все эти же 40 треугольников и тоже строит из некоторых из них квадрат, неравный Петиному, потом Петя снова делает то же самое и так далее. Главное условие,



чтобы все время получались квадраты разных размеров. Помогите ребятам построить как можно больше квадратов. Сколько различных квадратов у вас получилось и сколько треугольников потребовалось для каждого из них (нарисуйте или объясните, как их рисовать)?

Ответ: 7 квадратов из 2, 4, 8, 16, 18, 36 и 32 треугольников.

***Решение*:** соответствующие рисунки нарисовать нетрудно, разделив исходный квадрат отрезками, параллельными сторонам на 4, 9 или 16 одинаковых меньших квадратов.

4. Одно из положительных чисел увеличили на 1%, а другое на 4%. Могла ли в результате сумма этих чисел увеличится на 3%? Ответ обоснуйте.

***Решение*:** обозначив первое число через x, а второе – через y, получим следующее соотношение: $x \cdot 1{,}01 + y \cdot 1{,}04 = (x + y) \cdot 1{,}03$. Откуда после простых преобразований будем иметь: $y = 2x$, т.е. требуемое условие будет выполняться, если второе число в 2 раза больше первого.

Примечание. Возможно, чтобы легче пересчитывать проценты, для детей проще будут такие соображения: пусть первое число состоит из 100 одинаковых частей, равных a, тогда увеличенное на 1% число будет больше исходного на a, аналогично для второго числа: пусть оно состоит из 100 одинаковых частей b, тогда увеличенное на 4% число будет больше исходного на $4b$. Сумма этих чисел должна увеличиться на 3%, т.е. на $3 \cdot (a + b)$. Отсюда равенство: $a + 4b = 3 \cdot (a + b)$. Получаем, что $b = 2a$.

5. Как, используя 18 цифр «2», знаки арифметических действий и скобки, получить число 2022?

Первое решение, *основанное на разложении числа на множители*: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337 = 2 \cdot 3 \cdot (336 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 + 1) = 2 \cdot (2 \cdot 2 - 2:2) \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 - 2:2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 - 2:2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2:2)$

Второе решение, *основанное на ближайшей к числу* 2022 *степени числа* 2**:**
$2^{11} = 2048$, тогда $2022 = 2048 - 26 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 24 =$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 8 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 + 2:2)$.

Третье решение, *основанное на ближайшем к числу* 2022 *числа* 2 *из двоек*:
$2022 = 2222 - 200 = 2222 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2222 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (24+1) =$
$= 2222 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 + 2:2) + 2:2) =$ (*не хватает трех двоек*) =
$= 2222 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 + 2:2) + 2:2) + (2 - 2) \cdot 2$.

6. Пароль к компьютеру может содержать от 5 до 9 символов (больше 5 и меньше 9 символов). После каждого неверно введённого пароля нужно ждать 1 минуту до следующей попытки. Известно, что пароль точно содержит число «2022» и какие-то из букв «a», «b», «c», «d», причём буквы не повторяются. Хватит ли 4 часа, чтобы гарантированно подобрать верный пароль (т.е. подобрать даже в «самом худшем случае»)? Время на ввод пароля не учитывается.

***Ответ*: не хватит.**

Решение: Поскольку часть пароля известна (4 символа), неизвестных символов теперь больше 1 и меньше 5, то есть от 2 до 4 включительно. Узнаем сначала, сколько самых коротких паролей надо перебрать, то есть тех паролей, в которых всего 6 символов, 2 из которых неизвестны. Выберем 2 символа из 4 предложенных: первый можем выбрать 4 способами, второй – 3 способами (уже нельзя использовать первую букву, ведь буквы не повторяются). Всего 4·3=12 способов выбрать последовательность из 2 букв. Число «2022» может в каждой из последовательностей находиться в начале, в конце или между двумя буквами (3 возможных расположения). Тогда всего возможных шестизначных паролей 12·3=36. Теперь найдём количество семизначных паролей, где неизвестны 3 символа. Выберем 3 символа из 4 предложенных: первый можем выбрать 4 способами, второй – 3 способами, третий – 2 способами. Всего 4·3·2=24 способа выбрать последовательность из 3 букв. Число «2022» может в каждой из последовательностей находиться в начале, в конце, между первой и второй буквами или между второй и третьей буквами (4 возможных расположения). Тогда всего возможных семизначных паролей 24·4=96. Осталось найти количество восьмизначных паролей, где неизвестны 4 символа. Выберем 4 символа из 4 предложенных: первый можем выбрать 4 способами, второй – 3 способами, третий – 2 способами, четвёртый – 1 способом. Всего 4·3·2·1=24 способа выбрать последовательность из 4 букв. Число «2022» может в каждой из последовательностей находиться в начале, в конце, между первой и второй буквами, между второй и третьей буквами или между третьей и четвёртой буквами (5 возможных расположений). Тогда всего возможных восьмизначных паролей 24·5=120. Таким образом, всего возможных паролей 36+96+120=252. Заметим, что один из них верный, тогда неверных паролей 252-1=251, то есть в худшем случае 251 раз придётся ждать по 1 минуте. 251 мин= 4 ч 11 мин потребуется, чтобы подобрать пароль. Значит, 4 часа не хватит, чтобы наверняка подобрать пароль.

Время выполнения работы – 3,5 *часа (210 мин.)*

IX Минская городская Интернет-олимпиада по математике

Очный тур, 19 февраля 2022 года

7 класс - РЕШЕНИЯ

1. Четно или нечетно значение произведения $(3x+10y+5z-3)(5x-30y-z+10)$, где x, y и z – целые числа?

***Ответ*: четным.**

Решение. Или рассматриваем комбинации чет/нечет чисел x, y и z (всего 2^3 вариантов) или еще проще рассмотрим сумму: (3x+10y+5z-3)+(5x-30y-z+10)=8x-20y+4z+7 – нечет. Значит если сумма нечетная, то скобки будут разной четности. Значит произведение будет четным.

2. Дано достаточно много равных равнобедренных прямоугольных треугольников с катетом, равным 1. Из них нужно составлять квадраты. Толик старается составить из них как можно больше квадратов разных размеров. (Например, из двух таких треугольников легко составить квадрат размером 1×1, а из восьми треугольников – квадрат 2×2.)

   Покажите, что для любого натурального n можно составить квадраты, составленные ровно из $2n^2$ или $4n^2$ таких треугольников.

Решение: соответствующие рисунки нарисовать нетрудно, разделив исходный квадрат отрезками, параллельными сторонам на 4, 9, 16 и т.д. одинаковых меньших квадратов.

3. Существует ли 8 различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f, g, h таких, что

$$\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}} = 2022?$$

***Ответ*: существуют.**

Решение. По свойству пропорции имеем:

$$a+b+c+d+e+f+g+h = \frac{2022}{a}+\frac{2022}{b}+\frac{2022}{c}+\frac{2022}{d}+\frac{2022}{e}+\frac{2022}{f}+\frac{2022}{g}+\frac{2022}{h}$$

Если $a=\frac{2022}{b}$, то ab=2022 т.е. a, b – «противоположные» делители числа 2022.

Рассмотрим делители числа: 2022=1·2022=2·1011=3·674=6·337. Таким образом видим, что как раз сущствует ровно 8 различных делителей.

4. Два пловца стартуют по соседним дорожкам с разных сторон бассейна и плывут каждый со своей постоянной скоростью (не обязательно скорости пловцов равны между собой). Первый раз пловцы встречаются друг с другом на расстоянии 60 м от ближайшего конца дорожек. Достигнув концов дорожек, они моментально разворачиваются и сразу плывут обратно и при этом встречаются в 30 м от другого конца дорожек. Чему равна длина дорожек в бассейне?

***Ответ*: 150 м.**

Решение. Заметим, что когда пловцы встретились первый раз, они вместе проплыли всю дорожку бассейна целиком. Когда встретились второй раз, они вместе проплыли расстояние, равное по длине трем дорожкам. Значит, время от старта до второй встречи в 3 раза больше, чем время от старта до первой встречи. Получается, что тот пловец, который при первой встрече был на расстоянии 60 м от ближайшего конца дорожек, к моменту второй встречи проплыл 180 м, но по сути он проплыл всю дорожку, развернулся и проплыл еще 30 м назад. Поэтому получаем, что длина дорожки равна 150 м.

5. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* углы при вершинах *A, B, C* равны. На стороне *AB* отмечена точка *E*. Докажите, что если *AD*=*CD*=*BE*, то *CE* – биссектриса угла *BCD*.

Определение. Четырехугольник называется выпуклым, если все его углы меньше 180 градусов (или, иными словами, он целиком расположен по одну сторону относительно каждой прямой, получающейся при продолжении его сторон).

Решение (*предлагаем сделать рисунок самостоятельно*)**.** Треугольник *ADC* – равнобедренный. Следовательно, $\angle DAC=\angle DCA$. Поскольку $\angle A=\angle C$, то $\angle BAC=\angle BCA$. Значит *AB*=*BC*. Треугольники *BDA* и *BDC* равны по третьему признаку. Следовательно *BD* – биссектриса угла *ABC*. Треугольники *BCD* и *CBE* равны по первому признаку. Тогда

$$\angle BCE = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BCD.$$

Следовательно CE – биссектриса угла *BCD*.

6. Маша хочет приписать справа к числу 2021 две цифры так, чтобы полученное число делилось на 22, а Миша хочет приписать справа к числу 2022 две цифры так, чтобы полученное число делилось на 21. У кого больше способов выполнить задание?

***Ответ*: у Маши 4 способа, а у Миши – 5. Больше способов у Миши.**

Первое решение: Узнаем, сколько способов приписать справа к числу 2021 две цифры так, чтобы полученное число делилось на 22. Пусть удалось приписать две цифры необходимым образом, тогда получим шестизначное число $\overline{2021xy}$. Если это число делится на 22, то оно должно быть чётным и кратным 11. Цифра y – чётная. По признаку делимости на 11 разность (202 – $\overline{1xy}$) должна быть кратна 11 (от 11 до 99, больше 99 разность здесь быть не может), но разность чётных чисел (202 – чётное и $\overline{1xy}$ – чётное, так как y – чётная) не может быть нечётной, значит, подходят только чётные разности: 22, 44, 66, 88 (всего 4 варианта). Соответствующие окончания: 80, 58, 36, 14.

Узнаем, сколько способов приписать справа к числу 2022 две цифры так, чтобы полученное число делилось на 21. Пусть удалось приписать две цифры необходимым образом, тогда получим шестизначное число $\overline{2022kt}$. Если это число делится на 21, то оно должно делиться на 3 и на 7. Заметим, что 2022 кратно 3 (по признаку делимости на 3: сумма цифр числа кратна 3), значит, $\overline{kt}$ тоже кратно 3. По признаку делимости на 7 разность ($\overline{2kt}$ – 202) должна быть кратна 7, то есть ($\overline{kt}$ – 2) делится на 7. А поскольку $\overline{kt}$ ещё и кратно 3, то ($\overline{kt}$ – 2) даёт остаток 1 при делении на 3. Таким образом, ищем такие разности, которые делятся на 7 без остатка, а на 3 с остатком 1. Наименьшее такое число 7, а далее $7+21\cdot n$: 7, 28, 49, 70, 91 (больше 97 разность быть не может) – всего 5 вариантов. Соответствующие окончания: 09, 30, 51, 72, 93.

Таким образом, у Маши 4 способа, а у Миши – 5. Больше способов у Миши.

Второе решение. По существу второе решение показывает, как число способов, не используя указанные признаки на 7 и на 11, которые могут быть неизвестны детям.

Для подсчета способов, когда требуемое число делится на 22, воспользуемся более простым признаком делимости на 11, а именно: «разность сумм цифр, стоящих на четных местах и на нечетных местах должна делиться на 11». Тогда в обозначениях первой части будем иметь: $2+2+x-(1+y)=11p$ или $x-y=11p-3$. Учитывая, что x и y – цифры, а y – четная цифра, p может принимать только два значения 0 или 1. Простой перебор дает возможные пары xy: 80, 58, 36, 14.

Для подсчета способов, когда требуемое число $\overline{2022kt}$ делится на 21, воспользуемся «простым делением» на 7, и на 3 (хотя бы даже «столбиком»). Имеем $\overline{2022kt} = 202200 + \overline{kt} = 28885\times 7 + 5 + \overline{kt}$, откуда, как и в первом решении, видим, что ($5+\overline{kt}$) или, что по сути одно и тоже, ($\overline{kt}$ – 2) делится на 7. Далее, используя признак делимости на 3, снова как и в первом решении, получим необходимые пары цифр, необходимые для делимости требуемых чисел на 21: 09, 30, 51, 72, 93.

Время выполнения работы – 3,5 *часа (210 минут)*