Минская городская Интернет-олимпиада по математике – 2016

Р Е Ш Е Н И Е   З А Д А Ч

5 класс

1. За 4 карандаша и 3 тетради заплатили 7000 рублей, а за 2 карандаша и 1 тетрадь – 2800 рублей. Сколько стоит одна тетрадь и один карандаш?

Ответ: 2100 рублей.

Решение. Запишем условие в виде схемы

4 карандаша + 3 тетради = 7000 руб.,

2 карандаша + 1 тетрадь = 2800 руб.,

вычтем из первого второе:

2 карандаша + 2 тетради = 4200 руб.,

значит,

1 карандаш + 1 тетрадь = 2100 руб.

Примечание. Можно было найти по отдельности сколько стоит карандаш (700 руб.) и тетрадь (1400 руб.).

2. Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и трехвостым. «Вот тебе меч-кладенец, – сказала царевичу Баба Яга. – Одним ударом ты можешь срубить Змею либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Запомни: срубишь голову – новая вырастет; срубишь хвост – два новых вырастут; срубишь два хвоста – голова вырастет; срубишь две головы – ничего не вырастет. Победишь, если отрубишь у Змея Горыныча все головы и все хвосты!»

Сможет ли Иван-царевич победить, и если – да, то какое наименьшее количество ударов ему для этого понадобится? (Ответ объясните.)

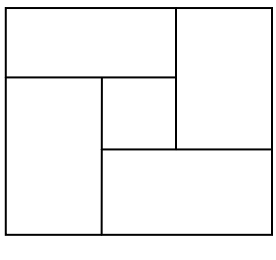
Ответ: 9 ударов.

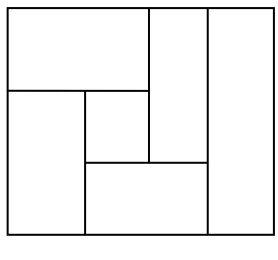
Решение. Проанализируем задачу с конца. Чтобы победить нужно, чтобы у Змея Горыныча было четное число голов и хвостов (отрубая по 2, мы уменьшаем количество, и тех и других).

Изначально хвостов три, поэтому всего голов будет не менее 5 (суммарно отрубленных), а значит, надо 6. Дополнительные три головы могут получиться из 6 хвостов. Отсюда и один из простых алгоритмов, и минимальность количество ударов:

- сначала три раза отрубаем по хвосту и получаем 6 хвостов (это 3 удара)
- затем три раза отрубаем по два хвоста и получаем 6 голов (хвостов уже нет, это еще 3 удара)
- и наконец, три раза отрубаем по две головы (теперь и голов нет, и это еще 3 удара).

3. Можно ли разрезать квадрат на 5 прямоугольников, никакие два из которых не имеют общей стороны? А на 6 можно?





Ответ: можно и на 5, и на 6, см. рис.

4. а) К трехзначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могло ли получиться так, что все цифры суммы будут нечетными?

б) К пятизначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могло ли получиться так, что все цифры суммы будут нечетными?

Ответ: а) да, б) нет.

Решение. а) см. пример: $\begin{array}{r} +\begin{array}{r}437\\734\end{array}\\ \hline 1171\end{array}$.

б) По аналогии с пунктом а) попробуем изучить схему сложения «столбиком» для пятизначных чисел (здесь разные буквы могут означать одинаковые цифры):

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e\\ e & d & c & b & a\end{array}\\ \hline (x+1)\ldots z\ldots x\end{array}.$$

Заметим, что сумма $a+e$ должна давать нечетную цифру x в разряде единиц (см.рис.). На месте z будет стоять четная цифра (число единиц в сумме $c+c$), а нужна нечетная, следовательно, сумма $b+d$ должна дать 1 в разряде десятков. Но тогда и цифра в разряде десятков тысяч в итоговой сумме получится (x+1), т.е. четная.

5. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой – 50, во второй – 60, в третьей – 70. Ход состоит в разбиении любой (одной) кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню. Каждый игрок стремится к победе и старается играть наилучшим образом. Кто победит в этой игре? Ответ объясните.

Ответ: победит первый игрок независимо от стратегии обоих игроков.

Решение. В начале было три кучки камней, в конце – 180 кучек по одному камню. После каждого хода первого игрока будет четное число кучек, после каждого хода второго – нечетное, отсюда ответ в задаче.

6. Из цифр 1, 2, 3, 4 составили всевозможные четырехзначные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует только один раз. Докажите, сумма полученных чисел делится: а) на 2; б) на 3.

Первое доказательство. а) любое из складываемых чисел можно записать так:

$$\overline{a\,b\,c\,d} = 1000a + 100\cdot b + 10\cdot c + d, \qquad (*)$$

где a, b, c, d - некоторая перестановка цифр в 1, 2, 3 и 4. Четность суммы всех чисел зависит от суммы цифр в разряде единиц. Но 2 и 4 – и так четные цифры, а 1 и 3 встречаются в сумме по 6 раз (именно столько существует различных перестановок оставшихся трех цифр). Поэтому сумма цифр в разделе единиц будет четная.

б) Основная идея доказательства уже приведена в пункте а). Каждая из цифр в каждом разряде встречается по 6 раз. То есть, складывая все единицы в числах, получим число кратное 6, обозначим это число $6k$; аналогично, складывая «десятки», получим $6k \cdot 10$, складывая сотни, получим $6k \cdot 100$, складывая тысячи, получим $6k \cdot 1000$. Значит и вся сумма делится на 6, т. е. и на 3.

Второе доказательство. Достаточно просто заметить, что описанных чисел ровно 24 (число перестановок цифр 1, 2, 3, 4), переписать все эти числа (1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432 и т. д.) и сложить!

Полученная сумма равна 66660, очевидно, делится на 6, а значит на 2 и на 3.

6 класс

1. Сколько различных произведений, делящихся на 10 без остатка, можно составить из чисел 2, 3, 5, 10? (Вырожденный случай, когда произведение состоит из одного сомножителя, тоже считается.)

Ответ: 8.

Решение. Если в произведении использовать число 10, то получим восемь различных произведений:

$$10,\ 20 = 10\cdot 2,\ 30 = 10\cdot 3,\ 50 = 10\cdot 5,\ 60 = 10\cdot 2\cdot 3,$$

$$100 = 10\cdot 2\cdot 5, 150 = 10\cdot 3\cdot 5,\ 300 = 10\cdot 2\cdot 3\cdot 5.$$

Если не использовать число 10, то обязательно нужно использовать $2\cdot 5 = 10$, но тогда этот вариант и еще один возможный $2\cdot 3\cdot 5 = 30$ уже встречались в первой группе.

2. Фома и Ерёма нашли на дороге по пачке 11-рублевок. В чайной Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерёма выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Ерёма.

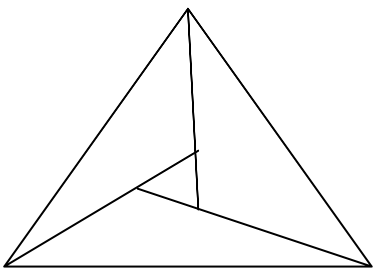
Решение. Запишем условие задачи в виде схемы.

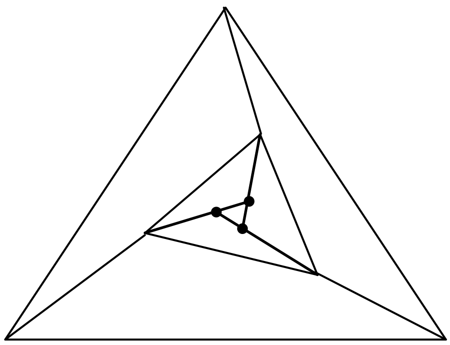
Для Фомы: 3 чая + 4 калача + 5 бубликов = $11\cdot z$, где z - целое число 11-рублевок; отсюда 3 чая = $11\cdot z$ – 4 калача – 5 бубликов.

Тогда для Еремы: 9 чая + 1 калач + 4 бублика = $3\cdot(11\cdot z$ – 4 калача – 5 бубликов) + 1 калач + 4 бублика = $33\cdot z$ – 11 калачей – 11 бубликов, а это кратно 11 (помним, что калач и бублик стоят целое число рублей).

3. Можно ли разрезать треугольник на 4 треугольника, никакие два из которых не имеют общей стороны? А на семь можно?

Ответ: можно и на 4, и на 7, см. рис.





Примечание. Во втором случае мы один из треугольников (на рисунке средний) разрезали как исходный.

4. Ферзь стоит на поле c1. За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле h8. Кто победит при правильной игре и как ему надо играть?

Ответ: победит первый игрок.

Решение. Решающей идеей является рассмотрение игры с конца. Если на ком-то ходу одного из соперников ферзь уже стоит на поле h8, то этот соперник проиграл (проигрышная позиция). Все поля, из которых можно попасть на h8, являются выигрышными (см. рис., они выделены знаком «+» и заливкой). Ясно, что тогда поля f7 и g6 проигрышные (если игрок ходит из любого из них, он отдаст сопернику выигрышную позицию). Так будем заполнять «+» и «-» и дальше, см. рис. Видим, что поле c1 изначально выигрышное.

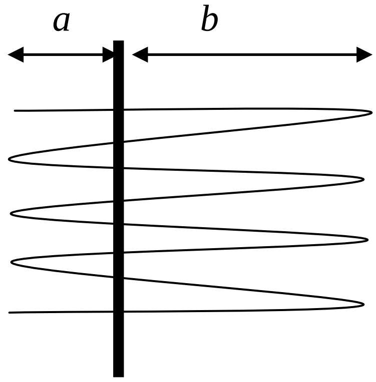
	a	b	c	d	e	f	g	h
8			+	+	+	+	+	-
7			+	+	+	-	+	+
6			+	+	+	+	-	+
5			-	+	+	+	+	+
4			+	+	+	+	+	+
3			+	+	-	+	+	+
2			+	+	+	+	+	+
1			+	-	+	+	+	+

5. Из цифр 1, 2, 3, 4 составили всевозможные четырехзначные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует только один раз. Докажите, сумма полученных чисел делится на 6.

Решение. См. решение задачи № 6 для 5 класса.

6. Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в одном месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 сантиметров и 4 сантиметра?

Ответ: 52 см, 68 см или 88 см.



Решение. Изобразим схематично сложенную три раза веревку и разрез в виде вертикальной черты, на расстоянии a от левого края и на расстоянии b от правого. Анализируя рисунок, видим, что возможные длины кусочков веревки: a, $2a$ и $2b$, а длина всей веревки $l = 8 \cdot (a+b)$. Какие из кусочков могут принимать значения 4 см и 9 см? Смотрите следующую схему (таблицу). Учитывая, что a и $2a$ не могут равняться 4 и 9, а также b и $2b$ не могут, получаем следующие варианты:

	4	9
1)	a	$2b$
2)	$2a$	$2b$
3)	$2b$	$2a$
4)	$2b$	a

1) $a = 4,\ b = 4{,}5$, тогда $l = 8 \cdot 8{,}5 = 68$ см,

2) и 3) $\left.\begin{array}{l} a = 2,\ b = 4{,}5 \\ b = 2,\ a = 4{,}5 \end{array}\right\}$ – тогда $l = 8 \cdot 6{,}5 = 52$ см,

4) $b = 2,\ a = 9$, тогда $l = 8 \cdot 11 = 88$ см.

<u>**7 класс**</u>

1. Волшебным считается момент, в который число минут на электронных часах совпадает с числом часов. Чтобы сварить волшебное зелье, его надо и поставить на огонь, и снять с огня в волшебные моменты. А чтобы оно получилось вкусным, его надо варить от полутора до двух часов. Сколько времени варится вкусное волшебное зелье?

Ответ: 1 час 38 мин.

Решение. Перепишем все волшебные моменты. Видим, что почти везде между двумя соседними волшебными моментами 1 час 1 мин., а между волшебными моментами – через один: 2 час 2 мин., что не подходит по условию. Единственные исключения из этого правила – время между 22 час 22 мин. и 0 час 0 мин. и между 23 час 23 мин. и 1 час 1 мин., т. е. 1 час 38 мин.

00 час	00 мин
01 час	01 мин
02 час	02 мин
– – –	– –
11 час	11 мин
12 час	12 мин
– – –	– –
22 час	22 мин
23 час	23 мин

2. На складе имеются по 200 сапог 41, 42, 43 размеров, причем известно лишь, что среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Всегда ли можно из данного набора составить 100 годных пар обуви?

Ответ: всегда можно.

Решение. Представим условие в виде следующей схемы (модели):

41 размер левые	41 размер правые	42 размер левые	42 размер правые	43 размер левые	43 размер правые
x штук	200-x штук	y штук	200-y штук	z штук	200-z штук

т. е. левых сапог в соответствии с размерами будет x, y и z штук, а значит $x + y + z = 200$.

Кажется, что первый вопрос, возникающий для каждого размера, каких сапог больше – левых или правых, и отсюда оценка количества пар годных сапог в каждом размере. Рассмотрим несколько случаев.

а) $x \le 200 - x,$
$y \le 200 - y,$
$z \le 200 - z,$

т. е. в каждом размере левых сапог не больше чем правых. На самом деле это простой случай, ибо, сложив неравенства, получим:

$$x + y + z \le 600 - x - y - z,$$

$$2(x + y + z) \le 600,$$

$$x + y + z \le 300,$$

а по условию $x + y + z = 300$, следовательно, этот случай выполняется тогда, когда $x = 100,\ y = 100,\ z = 100$ и можно составить даже 300 годных пар сапог.

б) Каких-то левых сапог больше, чем правых, для определенности 43-го размера, т. е.

$$z > 200 - z,$$

а остальных не больше, т. е.

$$x \le 200 - x,$$
$$y \le 200 - y.$$

Но тогда $x \le 100,$
$y \le 100,$
$z > 100,$

и число годных пар сапог равно:

$$x + y + (200 - z) = 200 + x + y - z = 200 + \underbrace{x + y + z}_{300} - 2z = 500 - 2z \ge 100, \text{ ибо } z \le 200.$$

в) Остальные случаи, т. е. когда во всех размерах правых сапог больше, или равно в двух размерах правых сапог больше, рассматриваются аналогично (достаточно число правых сапог обозначить x, y и z).

3. Можно ли 100 гирь массами 1, 2, 3, ..., 100 разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

Ответ: нельзя.

Решение. Суммарная масса всех гирь равна: $1+2+3+\ldots+100=5050,$ т. е. масса самой тяжелой кучки будет более 500, но тогда в ней будет не менее 6 гирь. Значит, в более легких по массе кучек будет не менее $7, 8, 9, 10, \ldots, 15$ гирь (число гирь обязательно различно), т. е. всего в кучках не менее: $6+7+8+\ldots+15=105$ гирь, а их всего 100.

4. Имеется две кучки камней: в первой – 7, во второй 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает то, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре и как ему надо играть?

Ответ: выигрывает первый игрок.

Решение. (Сравните с решением задачи №4 из 6 класса). Будем записывать количество камней в кучках в виде упорядоченной пары чисел, т. е. в начале игры имеем пару (7,5), а в конце пару (0,0) – это проигрышная позиция. Изобразим «поле игры» в виде прямоугольника в целочисленной системе координат (см.рис.). Сразу видим, что позиции выделенные серой заливкой выигрышны, из них есть ход сразу в проигрышную (0,0), а позиции (1,2) и (2,1) – проигрышные, как ни ходи из них – отдашь сопернику выигрышную.

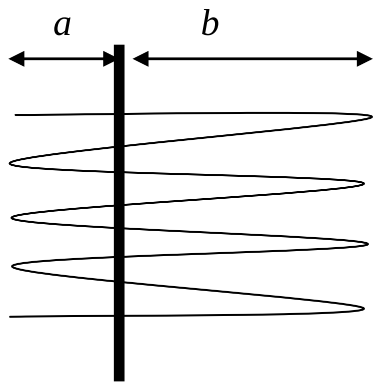
7	+	+	+	+	-	+
6	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	-	+	+
4	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	-
2	+	-	+	+	+	+
1	+	+	-	+	+	+
0	-	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5

На рисунке знаком «-» обозначены проигрышные позиции, а знаком «+» обозначены выигрышные. Теперь легко понять какими – выигрышными или проигрышными – будут остальные позиции на поле игры, заполняя последовательно соответствующие вертикальные, горизонтальные или диагональные строчки из клеток. В конце увидим, что поле (7,5) – изначально выигрышное (см.рис.).

5. а) Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в одном месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 сантиметров и 4 сантиметра?
б) А если веревочку сложили пополам несколько раз (а именно k раз)?

Ответ: а) 52 см, 68 см или 88 см.
б) при $k \geq 2$: $2^k \cdot 8{,}5$см, $2^k \cdot 6{,}5$см, $2^k \cdot 11$см,
$k = 0$: 13см,
$k = 1$: 17 или 22см.

Решение. а) Изобразим схематично сложенную три раза веревку и разрез в виде вертикальной черты, на расстоянии a от левого края и на расстоянии b от правого. Анализируя рисунок, видим, что возможные длины кусочков веревки: a, $2a$ и $2b$, а длина всей веревки $l = 8 \cdot (a + b)$. Какие из кусочков могут принимать значения 4 см и 9 см? Смотрите следующую схему (таблицу). Учитывая, что a и $2a$ не могут равняться 4 и 9, а также b и $2b$ не могут, получаем следующие варианты:



	4	9
1)	a	$2b$
2)	$2a$	$2b$
3)	$2b$	$2a$
4)	$2b$	a

1) $a = 4,\ b = 4{,}5$, тогда $l = 8 \cdot 8{,}5 = 68$см,

2) и 3) $\left.\begin{matrix} a = 2,\ b = 4{,}5 \\ b = 2,\ a = 4{,}5 \end{matrix}\right\}$ – тогда $l = 8 \cdot 6{,}5 = 52$см,

4) $b = 2,\ a = 9$, тогда $l = 8 \cdot 11 = 88$см.

б) Легко видеть, что при $k \geq 2$ все описанные в пункте а) случаи сохраняются, отсюда ответы: $2^k \cdot 8{,}5$см, $2^k \cdot 6{,}5$см, $2^k \cdot 11$см;

при $k = 1$ не будет случая 2) и 3), так как нет кусочка длины $2a$, и поэтому здесь ответы: 17 см и 22 см;

при $k = 0$ получится всего два кусочка a и b, поэтому один ответ: $4 + 9 = 13$см.

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составили всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует только один раз. Докажите, сумма полученных чисел делится на 9.

Доказательство. (сравните решение задачи №6 из варианта для 5 класса). Запишем каждое из чисел в виде

$$\overline{abcdefg} = a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^2 + f \cdot 10 + g.$$

Суммирование можно осуществлять поразрядно, т. е. сначала сложить все цифры, стоящие в разряде единиц, затем все цифры, стоящие в разряде десятков, умножив полученную сумму на 10, и так далее.

Важно понять, что, во-первых, суммы цифр во всех разрядах окажутся одинаковыми, а, во-вторых, каждая цифра в каждом разряде встретится столько раз, каково число различных перестановок оставшихся шести цифр.

Количество перестановок двух цифр: 2, трех цифр: $2 \cdot 3 = 6$, четырех цифр: $6 \cdot 4 = 24$, пяти цифр: $5 \cdot 24 = 120$, шести цифр: $120 \cdot 6 = 720$. Таким образом, сумма цифр в каждом разряде делится нацело на 720, а, значит, и на 9, или 18, а, значит, и вся сумма делится на эти же числа нацело.

8 класс

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составили всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует только один раз. Докажите, сумма полученных чисел делится на 18.

Доказательство. Запишем каждое из чисел в виде

$$\overline{abcdefg} = a\cdot 10^6 + b\cdot 10^5 + c\cdot 10^4 + d\cdot 10^3 + e\cdot 10^2 + f\cdot 10 + g.$$

Суммирование можно осуществлять поразрядно, т. е. сначала сложить все цифры, стоящие в разряде единиц, затем все цифры, стоящие в разряде десятков, умножив полученную сумму на 10, и так далее.

Важно понять, что, во-первых, суммы цифр во всех разрядах окажутся одинаковыми, а, во-вторых, каждая цифра в каждом разряде встретится столько раз, каково число различных перестановок оставшихся шести цифр.

Количество перестановок двух цифр: 2, трех цифр: $2\cdot 3 = 6$, четырех цифр: $6\cdot 4 = 24$, пяти цифр: $5\cdot 24 = 120$, шести цифр: $120\cdot 6 = 720$. Таким образом, сумма цифр в каждом разряде делится нацело на 720, а, значит, и на 9, или 18, а, значит, и вся сумма делится на эти же числа нацело.

2. а) Верёвочку сложили пополам, потом ещё раз пополам, потом снова пополам, а затем все слои верёвочки разрезали в одном месте. Какова могла быть длина верёвочки, если известно, что какие-то два из полученных кусков имели длины 9 сантиметров и 4 сантиметра?

б) А если веревочку сложили пополам несколько раз (а именно k раз)?

Ответ:

Решение. См. решение задачи № 5 для 7 класса.

3. а) К семизначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могло ли получиться так, что все цифры суммы будут нечетными?

б) К 17-тизначному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Могло ли получиться так, что все цифры суммы будут нечетными?

Ответ: а) могло; б) нет, не могло.

Решение. а) См. пример $\begin{array}{r} +\begin{array}{r}4243727\\7273424\end{array}\\ \hline 11517151\end{array}$.

б) Сравните решение задачи 4б) из 5 класса. Обозначим цифры 17-значного числа $x_1, x_2 \ldots x_{17}$ и запишем столбиком сумму этого числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке; при этом перенумеруем слева направо от 1 до 17 колонки, в которых происходит суммирование соответствующих цифр (см.рис.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
x_{17}	x_{16}	x_{15}	x_{14}	x_{13}	x_{12}	x_{11}	x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1

z

Предположим от противного, что как и в пункте а) найдутся два 17-значных числа, сумма которых состоит только из нечетных цифр. Посмотрим, как происходит процесс последовательного сложения цифр, начиная с середины, т. е. с 9-й колонки: $x_9 + x_9$, исходная сумма четна, значит, в 9-й колонке добавилось 1 за счет перехода разряда из 10-й (там стоит $x_{10} + x_8$).

Но точно так же перейдет 1 из 8-й колонки в 7-ю, где стоит $x_7 + x_{11}$, которая тогда должна быть четной. Эта же четная сумма $x_7 + x_{11}$ стоит в 11-й колонке и она получит 1 из 12-й, где стоит $x_{12} + x_6$. То есть и в 5-й колонке, где стоит $x_5 + x_{13}$ сумма изначально будет четной, и так далее до 1-й колонки, где стоит $x_1 + x_{17}$, и где сумма будет четной, а 1 добавится из 2-й колонки. Но эта же сумма $x_1 + x_{17}$ стоит в 17-й колонке, и здесь она останется четной, ибо единицу здесь получить неоткуда!

Противоречие!

4. Рассмотрим все моменты времени, когда часовая и минутная стрелки часов лежат на одной прямой, образуя развернутый угол. Найдутся ли среди таких прямых две взаимно перпендикулярные?

Ответ: нет, не найдутся.

Первое решение. Если бы нашлись две взаимно перпендикулярные прямые, описанные в условии, то часовые стрелки, направленные вдоль этих двух прямых, располагались бы так, что моменты времени, соответствующие им, отличались бы ровно на 3 часа. Но тогда минутные стрелки должны были быть направлены ОДИНАКОВО (иначе моменты времени не будут отличаться ровно на 3 часа).

Второе решение. Будем измерять углы в градусах, а время в минутах. Часовая стрелка совершает полный оборот за 12 часов (720 мин.). Поэтому угловая скорость часовой стрелки равна 0,5 град/мин. Угловая скорость минутной стрелки ровно 6 град/мин. То есть минутная стрелка обгоняет часовую со скоростью $(6-0,5)=5,5$ град/мин.

Нас интересуют моменты, когда минутная стрелка обгонит часовую на $180°+360°\cdot k$, где k может принимать значения $0,1,2,\ldots 10$ (т.е. когда минутная стрелка обгонит часовую на полкруга, полтора круга, и т.д.). Моменты времени, когда это проходит обозначим t_k, т.е.

$$t_k = \frac{180°+360°\cdot k}{5,5°} = \frac{360}{11}(2k+1), \quad k = 0,1,2,\ldots 10.$$

Отметим, что это и есть все моменты, когда часовая и минутная стрелки лежат на одной прямой, образуя развернутый угол.

Рассмотрим теперь углы между минутными стрелками в разные моменты t_k и t_e:

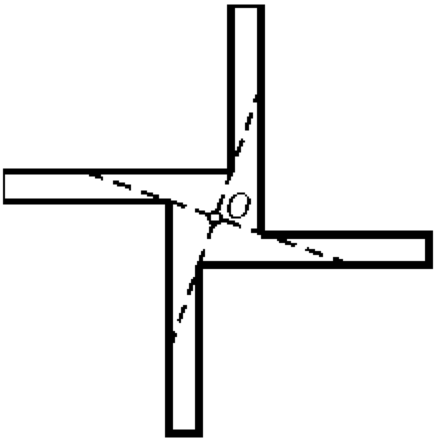
$$6°\cdot t_k-6°\cdot t_e=6°\cdot\frac{360°}{11}(2k+1)-6°\cdot\frac{360°}{11}(2e+1)=\frac{360°}{11}\cdot 12\cdot(k-e),$$

и как видим эта разность ни при каких k и e $(k,e=0,1,2,\ldots,10)$ не будет равна $90°$ или $270°$, т.е. минутные стрелки в такие моменты не будет образовывать прямой угол.

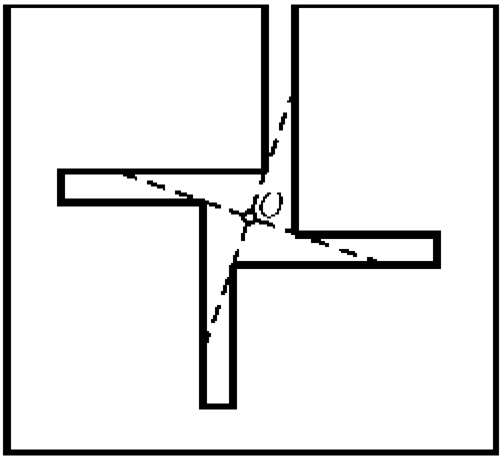
5. а) Нарисуйте многоугольник и точку O внутри его так, чтобы ни одна сторона не была видна из неё полностью.
б) Нарисуйте многоугольник и точку O вне его так, чтобы ни одна сторона не была видна из неё полностью.

Решение. См. рисунки:

а)



б)



6. Двое играют в следующую игру. Имеется три кучки камней: в первой – 50, во второй – 60, в третьей – 70. Ход состоит в разбиении каждой кучки, состоящей более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, после чьего хода во всех кучках будет по одному камню. Кто победит при правильной игре и как ему надо играть?

Ответ: победит первый игрок.

Решение. Будем пока рассматривать только большую кучку и найдем проигрышные и выигрышные позиции в этой игре (анализируя с конца), см. схему («-» означает проигрышную позицию, «+» означает выигрышную).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…
-	+	-	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	-	+	
30	31	32		…		61	62	63	64	65	66		…		70	
+	-	+				+	+	-	+	+	+				+	.

Т. е. все проигрышные позиции записываются с помощью формулы $2^k-1,\ k=1,2,3,4,5,6.$ Отсюда стратегия первого игрока: 1-й ход большую кучку делит на части 63 и 7, а остальные как угодно. Каждым следующим ходом он делит все кучи так, что в самой большей кучке остается последовательно: 31, 15, 7, 3, 1 камень.