Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов
2016 год

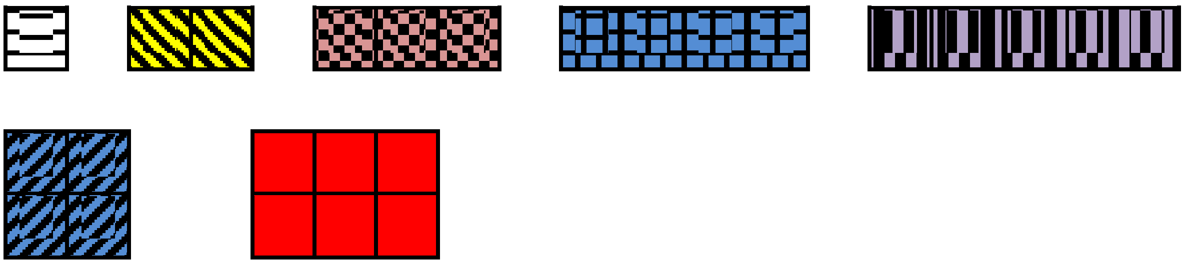
Решения задач очного тура (15 октября)

8 класс

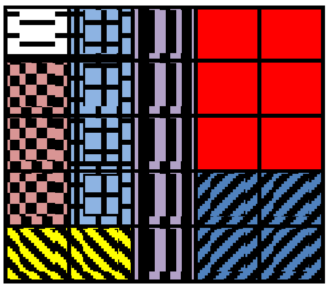
1. В квадрате 5×5 проведены разрезы по некоторым сторонам квадратов 1×1. Могло ли получиться так, что квадрат распался на 7 прямоугольников, любые два из которых различны?

   Ответ: Да.

Решение. Возможны такие виды прямоугольников:



Другие не поместятся в квадратах 5×5. Но как раз суммарно они дают 25 клеток. Осталось показать пример разрезания, см. рис.



2. Два различных натуральных числа записаны при помощи 4 четверок, 3 троек, 2 двоек и одной единицы каждое. Может ли одно из них делиться на другое нацело? (Ответ обоснуйте, в случае «да» достаточно привести пример).

   Ответ: Нет.

Решение. Если одно из этих чисел делится на другое, то частное может быть равно только 2 или 3. Действительно, числа различны, значит, частное не равно 1. С другой стороны, самым большим из описанных чисел может быть 4444333221, а самым маленьким 1223334444, но даже их отношение меньше 4. Покажем, что отношение не может быть равно также 2 и 3. Если меньшее число умножить на 2, то в большем получаются цифры 6 и 8, что невозможно. Если меньшее число умножить на 3, то в большем обязательно будет цифра 6 или 7 (при переходе 1 в другой разряд), это тоже не соответствует условию. Таким образом, ответ: нет.

3. Вдоль дороги растут 2002 ели. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее через одно от того, на котором сидела. Могло ли так получиться, чтобы на каждой ели снова сидело по одной вороне?

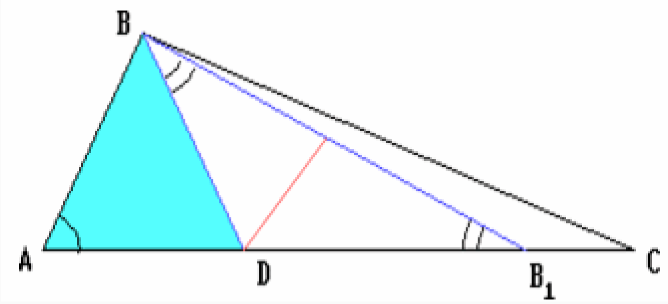
Ответ: Нет.

Решение 1 (основанное на идее инварианта). Перенумеруем все ели от 1 до 2002. Вороны, которые сидели на елях с нечетными номерами, вновь будут сидеть на елях с нечетными номерами. Если на каждой ели сидит по вороне, то сумма нечетных номеров елей, на которых сидят вороны до и после перелета не изменится. Однако каждая ворона изменяет номер своей ели на (+2) или (-2), причем ворон сидящих на нечетных елях 1001 (нечетное число), то есть не может получиться равное количество (+2) и (-2), поэтому сумма номеров должна измениться.

Решение 2 (основано на идее принципа крайнего и четности). Вновь перенумеруем все ели от 1 до 2002 (такие же номера будут использовать в исходной позиции и для ворон). Первая ворона может перелететь только на третью ель. Если третья ворона перелетит на пятую, то на первую ель никто не прилетит. Значит, первая и третья вороны обязаны поменяться елями (если, конечно, мы хотим выполнить условие задачи). Исключив из рассмотрения первую и третью ворону, тоже самое скажем про пятую и седьмую. И так далее до 1997-й и 1999-й, но тогда 2001-я ворона останется без пары, с которой ей можно было поменяться.

4. Дан треугольник ABC. Найти на стороне AC такую точку D, чтобы периметр треугольника ABD равнялся длине стороны BC. При каком соотношении сторон это возможно?

Решение. Предположим, что нужная точка D построена. На луче DC отложим отрезок DB_1, равный отрезку DB (см. рисунок). Тогда в треугольнике BAB_1 известны две стороны (AB и $AB_1 = AD + DB_1 = AD + DB = BC - AB$) и угол между ними. Поскольку треугольник DBB_1 равнобедренный, серединный перпендикуляр к его стороне BB_1 пересекает сторону AC в искомой точке D.



(Возможен другой вариант построения точки D, основанный на равенстве углов при основании равнобедренного треугольника: $\angle B_1BD =$ $= \angle AB_1B$.)

Далее имеем: поскольку $AD + BD > AB$ (неравенство треугольника для треугольника ABD), то $BC = AD + BD + AB > 2AB$.

В то же время место для точки B_1 на отрезке AB всегда найдется, ибо $BC = AB + AD + DB_1 < AB + AC$ (в виду неравенства треугольника для треугольника ABC),

Таким образом, задача всегда имеет решение, если $BC > 2AB$.

5. В турнире по футболу играют 18 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой по одному разу, причем каждый тур играется в один день, и в каждом туре играют все команды. Можно ли составить расписание игр так, чтобы для каждой команды игры на своем поле и на выезде чередовались?

Ответ: Нет.

Докажем от противного. Назовем нечетными команды, которые играют в первом туре на своем поле, а значит и в любом нечетном туре. Однако, в каком-то туре им придется играть между собой, т. е. некоторым из них придется в нечетном туре сыграть на чужом поле.

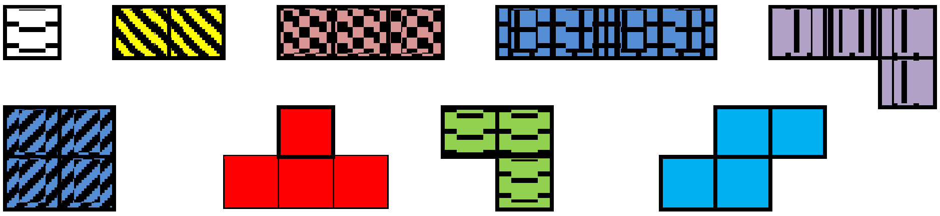
Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов
2016 год

Решения задач очного тура (15 октября)

9 класс

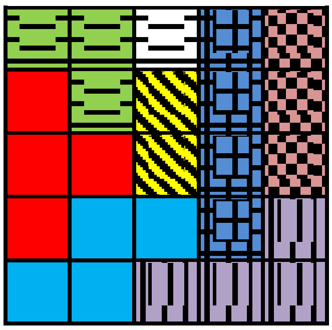
1. В квадрате 5 × 5 проведены разрезы по некоторым сторонам квадратов 1 × 1. Могло ли получиться так, что квадрат распался на 8 кусков, любые два из которых различны?

   Ответ: Да. Рассмотрим возможные куски:



На самом деле даже из этих можно выбрать такие, из которых можно составить квадрат 5 × 5 (а значит, и разрезать его на такие).

Пример: см. на рис.



2. Два различных натуральных числа записаны при помощи 40 единиц, 30 двоек, 20 троек и 10 четверок каждое. Докажите, что ни одно из них не делится на другое.

   Ответ: Нет.

Решение. Если одно из этих чисел делится на другое, то частное может быть равно 2 или 3. Действительно, числа различны, значит, частное не равно 1. С другой стороны, самым большим из таких чисел является $\underbrace{4444444444}_{10\text{четверок}}\underbrace{3333\ldots33}_{20\text{троек}}\underbrace{222\ldots22}_{30\text{двоек}}\underbrace{111\ldots11}_{40\text{единиц}}$, а самым маленьким:

$\underbrace{11111\ldots111}_{40\text{единиц}}\underbrace{222\ldots22}_{30\text{двоек}}\underbrace{3333\ldots33}_{20\text{троек}}\underbrace{4444444444}_{10\text{четверок}}$, но даже их отношение меньше 4 (попробуйте умножить меньшее на 4). Покажем, что отношение не может быть ровным ни 2 ни 3. Если оно ровно 2, то в большем числе должны быть шестерки и восьмерки. Если же оно ровно 3, то в большем будут 6-ки и 7-ки ($2\cdot 3=6$, а при переходе 1 в такой разряд получим 7). Поэтому ответ: нет.

3. Вдоль дороги растут 2016 елей. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее ровно через 31 дерево от того, на котором сидела. Могло ли так получиться, чтобы на каждой ели снова сидело по одной вороне?

Ответ: Нет.

Решение 1. Перенумеруем ели от 1 до 2016. Отметим, что вороны с 1-й ели должны перелететь через 31 ель и сесть на 32-ю от исходной, т. е. на 33, с 33-й на 1-ю или 65, и т. д. То есть вороны с елей, пронумерованных, как $32k+1$ будут менять номера своих елей на ± 32. Но таких ворон 63 (нечетное число). Если на каждой ели вновь будет сидеть по одной вороне, то сумма номеров елей описанных ворон (т. е. $1+33+65+\ldots+1985$) не должна измениться, но сумма нечетного числа чисел +32 и (-32) не равна нулю. Противоречие!

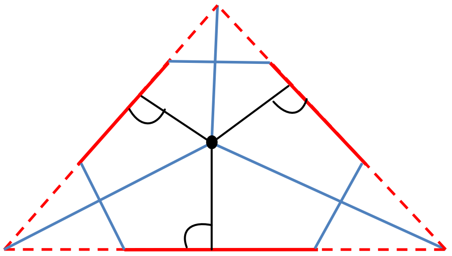
Решение 2(аналогично 2-му решению задачи №3 для 8 класса).

Важное замечание. Непосредственно во время проведения олимпиады некоторые учащиеся понимали условие так, что вороны приземлились на 31-ю ель, отстоящую от исходной. То есть номера елей менялись на ± 31, а не на ± 32 (см. первое решение, где сказано, что они перелетали через 31, то есть садились на 32-ю от исходной). Оба предложенных решения проходят и в этом случае, только все рассуждения нужно проводить не для ворон с номерами $1+31k,\ k=0,1,2,\ldots,$ ибо их ровно 66 $(31\cdot 65=2015)$, а, например, для ворон с номерами $2+31k,$ которых нечетное число, а именно 65.

4. Точка O, лежащая внутри правильного $2n$-угольника, соединена с его вершинами. Полученные треугольники раскрашены через один в красный и синий цвета. Доказать, что сумма площадей красных треугольников равна сумме площадей синих.

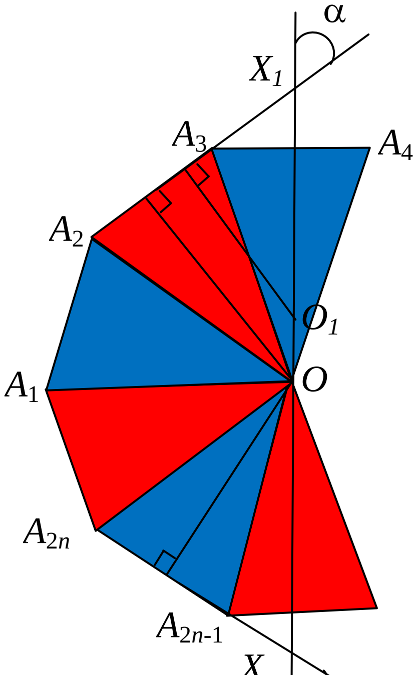
Решение (1 способ).

Будем рассматривать в качестве оснований всех треугольников стороны $2n$-угольника, а, значит, они все равны между собой. Красных и синих



треугольников поровну (по n штук). Поэтому надо показать, что сумма длин всех соответствующих высот красных треугольников равна сумме длин всех соответствующих высот синих. Продлим основания красных треугольников (будем их тоже называть красными) до пересечения всех пар соседних оснований (на рисунке показан случай для шестиугольника). Получится правильный n-угольник со сторонами, длины которых обозначим через l. Соединив выбранную точку с вершинами этого n-угольника, получим разбиение его на n треугольников с одинаковыми основаниями l, но тогда площадь n-угольника ровна половине произведения l на сумму длин всех высот этих треугольников. Но эта сумма длин всех высот как раз является суммой длин высот исходных красных треугольников. Проделав тоже самое с основаниями синих треугольников, мы и получим, что суммы длин высот красных и синих треугольников равны. Это замечание завершает доказательство.

Решение (2 способ).



Проведем через точку O прямую XX_1, параллельную одной из сторон $2n$-ника (для определенности обозначим ее A_1A_2, а остальные вершины $2n$-угольника последовательно обозначим $A_3, A_4, A_5, \ldots A_{2n}$, см. рис.). Покажем, что сдвиг точки O вдоль прямой XX_1 не меняет сумм площадей красных и синих треугольников. Для этого разобьем все красные и синие треугольники на пары соответствующих треугольников, как это показано на рисунке. А именно в первую пару попадут треугольник OA_1A_2 и ему противолежащий, если он того же цвета. (Иначе это будет «вырожденная» пара, состоящая из одного треугольника, которая получается в случае нечетного n). Площадь каждого этого треугольника при сдвиге O вдоль XX_1 не изменяется (высота остается неизменной). В следующую пару соответствующих треугольников попадут одноцветные OA_2A_3 и $OA_{2n}A_1$ (и так далее).

Покажем, что сумма площадей двух соответствующих треугольников не меняется при сдвиге точки O вдоль прямой XX_1. Действительно, пусть новое положение точки O это точка O_1; а острый угол между прямыми A_2A_3 и XX_1, а также A_1A_{2n} и XX_1 равен α. Основания выбранных треугольников равны, а высоты изменятся так: одна из высот уменьшится на $OO_1 \cdot \sin\alpha$ (на рисунке это высота ΔOA_2A_3), а другая увеличится на столько же. Исходя из этого, мы получим, что суммы площадей красных треугольников и синих треугольников при сдвиге точки О вдоль прямой параллельной любой из сторон $2n$-ника не меняются. Сдвинув точку O вдоль XX_1в положение X (точка пересечения прямых XX_1 и A_1A_{2n}), а затем вдоль прямой A_1A_{2n} в положение A_1, получим, что суммы площадей одноцветных треугольников равны сумме площадей треугольников $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_6A_7,\ldots$, $A_1A_{2n\text{-}2}A_{2n\text{-}1}$ (или сумме площадей треугольников $A_1A_{2n}A_{2n\text{-}1}$, $A_1A_{2n\text{-}2}A_{2n\text{-}3},\ldots$, $A_1A_4A_3$, что очевидно одно и тоже). Доказательство завершено.

5. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек принимало участие в турнире?

Ответ: 9.

Решение. Пусть участников n. Известно, что $(n-3)$ лучших набрвли половину своих очков играя между собой, и половину в играх с последними тремя (каждый из них половину, а значит, и в сумме). Составим уравнение. Между собой они вместе набрали $\dfrac{(n-3)\cdot(n-4)}{2}$ очков. В играх с последними $(n-3)\cdot 3-3$. Последнее количество очков получается, если из максимально возможных очков (т. е. $(n-3)\cdot 3$) вычесть те три очка, которые последние набрали в играх между собой (они ведь тоже удовлетворяют этому условию). Имеем:

$$\frac{(n-3)\cdot(n-4)}{2}=(n-3)\cdot 3-3$$
$$n^2-7n+12=6n-24$$
$$n^2-13n+36=0.$$

Откуда $n=9$ или $n=4$.

Но если $n=4$, то этот четвертый участник возьмет 0 очков и будет последним (а он должен быть первым).

А для 9 игроков пример построить нетрудно. Подойдет даже вырожденный случай:

- 6 лучших поделили поровну очки между собой (по 2,5) и еще по 2,5 у последних, т. е. всего по 5;
- 3 последних по 1 очку друг у друга и еще по $1/2$ у каждого из первых 6, итого по 2 очка!