IV Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов

## Очный тур, 19 октября 2019 год

## 8 класс.     Решения

1. Можно ли в прямоугольной таблице, состоящей из 2019 строк и 2020 столбцов расставить числа так, чтобы их сумма в каждой строке равнялась бы 2019, а сумма чисел каждого столбца равнялась бы 2018?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Попробуем найти сумму всех чисел в таблице двумя способами: сначала, просуммировав числа по строкам, и сложив полученные суммы, – получится $2019\times2019$, а затем, просуммировав числа по столбцам, и вновь сложив полученные суммы, – теперь получится $2020\times2018$. Поученные суммы очевидно не равны.

2. а) На какую цифру оканчивается разность $2020^{2020} - 2019^{2019}$?
   б) А на какие две цифры заканчивается эта разность?

**Ответ:** а) на 1. б) на 21.

**Решение. а)** Любая степень числа 2020 всегда оканчивается на 0. Число 2019 оканчивается на 9, поэтому его степени будут оканчиваться на те же цифры, что и степени числа 9. Заметим, что степени числа 9 могут оканчиваться на одну из цифр: 9 или 1 (на 9 нечётные степени, а на 1 – чётные). 2019 – нечётная степень, значит, $2019^{2019}$ оканчивается на 9. Разность числа, оканчивающегося на 0, и числа, оканчивающегося на 9, будет заканчиваться цифрой 1.

**б)** Ясно, что число $2020^{2020}$ заканчивается на 2020 нулей. Проанализируем, на какие две цифры будут заканчиваться различные степени числа 2019. Для этого достаточно рассматривать степени числа 19: последовательно будем иметь следующие пары цифр для 19, $19^2$, $19^3$, и т.д.: 19, 61, 59, 21, 99, 81, 39, 41, 79, 01, 19, т.е. пары последних цифр в числах, являющихся последовательными степенями числа 2019, будут повторяться через каждые 10 степеней. Из этой закономерности (периодичности) видно, что если показатель степени оканчивается цифрой 9, то значение такой степени заканчивается на 79.

Но тогда окончательно получаем, что разность числа, оканчивающегося на 00 (а именно числа $2020^{2020}$), и числа, оканчивающегося на 79, будет заканчиваться цифрами 21.

Замечание. Две последние цифры числа $2019^{2019}$ можно получить и по-другому, рассмотрев степень $2019^{2019} = (2020 - 1)^{2019}$ как произведение 2019 одинаковых сомножителей или, что проще, рассмотрев $19^{2019} = (20 - 1)^{2019} = (20 - 1)\cdot(20 - 1)\cdot(20 - 1)\cdot \ldots \cdot(20 - 1)$.

Здесь стоит произведение 2019 выражений вида (20 – 1), а последние две цифры значения этого произведения получатся из разности $2019\cdot20 - 1 = 40379$ (*попробуйте объяснить почему*?!). То же самое можно получить и из формулы бинома Ньютона (*для тех, кто ее знае*т).

3. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 50 так, чтобы каждые два соседних числа отличались либо на 2, либо в два раза?

**Ответ:** да.

**Пример**, 49, 47, ..., 3, 1, 2, 4, ..., 48, 50 (сначала нечётные числа в порядке убывания, затем чётные в порядке возрастания).

4. В соревнованиях участвуют 10 спортсменов и работают двое судей. Результат каждого спортсмена определяется следующим образом: каждый судья по-своему распределяет между спортсменами места (с первого по десятое), после чего победителем считается фигурист с наименьшей суммой мест (все суммы мест различны). Какое наибольшее значение может принимать эта сумма у победителя?

**Ответ.** 6.

**Решение.** *Оценка*. Поскольку каждый из двух судей распределил набор мест с первого по десятое, то сумма мест, присуждённых всеми судьями всем участникам соревнований, равна $2 \cdot (1 + 2 + ... + 10) = 110$.

С другой стороны, если победитель получил сумму мест не меньше 7, то все остальные получили сумму мест не меньше 8+9+10+11+12+13+14+15+16, что в общей сумме дает $23 \times 5 = 115 > 110$. Противоречие. Следовательно, сумма мест победителя не больше 6.

*Пример*. См. таблицу:

| **Судьи →** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Места 1-го | 3 | 2 | 4 | 7 | 1 | 10 | 5 | 6 | 9 | 8 |
| Места 2-го | 3 | 5 | 4 | 2 | 9 | 1 | 7 | 8 | 6 | 10 |
| Сумма мест | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 18 |

5. Вне равностороннего треугольника $ABC$ отмечены точки $S$ и $T$ такие, что $\angle SAB = \angle TCA = 45°$ и $\angle SBA = \angle TAC = 15°$.

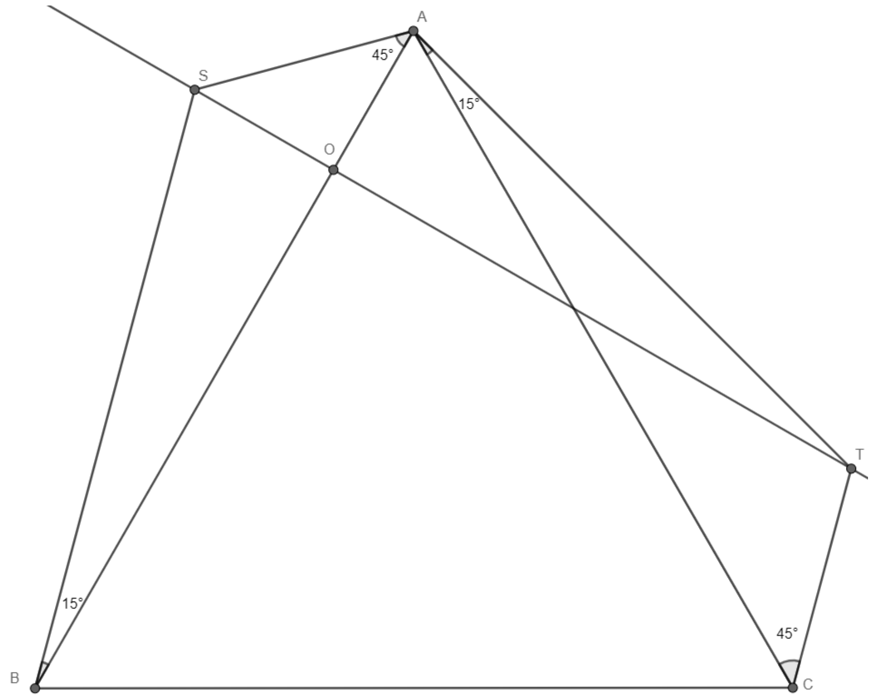
   а) Докажите, что $ST = AB$.

   б) Найдите угол между прямыми $ST$ и $AB$.

**Ответ:** б) 90°.

**Первое решение.** Пусть точка пересечения ST и AB – точка O (см. рисунок). По второму признаку треугольники SBA и TAC равны, значит SB=AT. $\angle SAT = 45° + 60° + 15° = 120°$. $\angle BSA = 180° - 45° - 15° = 120°$. Значит треугольники SBA и

ATS равны и следовательно утверждение а) верно. Также из этого следует, что ∠AST=45° и значит по сумме углов треугольника SOA ∠SOA=180-45°-45°=90°.




**Второе решение** (*доступное учащимся* 9 *классов*). Учитывая, что ∠ATC = 120°, а ∠ABC = 60°, получаем, что точка T лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (четырехугольник ABCT вписан в эту окружность). Аналогично точка S лежит на этой же окружности. Прямые ST и AB высекают на этой окружности две дуги величиной 90°, а значит, угол между ними равен 90°.

По этой же причине четырехугольник SBTA является равнобедренной трапецией, в которой ST и AB диагонали, а значит, они тоже равны.

6. Профессор Потапов меняет шило на мыло, академик Агатов 4 мыла на 1 шило, а доцент Долматов 1 мыло на 5 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у студента Сидорова оказалось столько же шила и мыла, сколько было вначале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 26.

**Решение.** Пусть студент совершил с Потаповым $a$ обменов, с Агатовым – $b$ обменов, а с Долматовым – $c$ обменов. Тогда так как количество шила у него не изменилось, то $a - b - 5c = 0$. А так как количество мыла у него не изменилось, то $-a + 4b + c = 0$. Откуда $3b = 4c$ т.е. $b = 4k$ и значит $c = 3k$. Подставляем в равенство для шила имеем $a = 19k$. А значит, всего обменов было $19k + 4k + 3k = 26k$, т.е. делиться на 26.

IV Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов

## Очный тур, 19 октября 2019 год

## 9 класс.     Решения

1. У Егора есть набор чисел: 2011, 2012, 2013, 2016, 2018, 2019 и 2002. Известно, что среднее арифметическое выбранных им пяти чисел – целое число. Если два из выбранных им чисел 2012 и 2019, найдите сумму оставшихся трёх чисел.

**Ответ:** 6029.

**Решение:** Среднее арифметическое выбранных пяти чисел – целое число, следовательно, сумма этих чисел кратна 5. Посмотрим остатки при делении на 5 всех семи чисел: 1, 2, 3, 1, 3, 4 и 2 соответственно. Остатки выбранных Егором чисел – 2 и 4. Значит, остатки трёх остальных должны давать в сумме 4. Тогда это числа: 2011, 2002 и 2016.

Заметим, что можно найти эти числа и простым перебором. По сути перебор охватывает максимально $C_5^3 = C_5^2$ = 10 вариантов.

2. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 50 так, чтобы каждые два соседних числа отличались либо на 2, либо в три раза?

**Ответ:** нет.

**Решение:** Согласно условиям задачи рядом с каждым нечетным числом может стоять только нечетное число, и вообще, при переходе от одного из этих чисел к другому при выполнении условий задачи четность чисел не меняется.. Поэтому в такой последовательности не может быть двух чисел разной четности.

3. В некотором агрогородке живет 2019 жителей. Время от времени они меняют друг у друга одну монету достоинством в 5 копеек, на три монеты достоинством в 2, 2 и 1 копейки или наоборот. Могло ли так случится, что в течении некоторой недели каждый отдал при таких обменах а) ровно 6 монет? б) ровно 8 монет?

**Ответ**: а) Нет, б) Да.

**Решение.** а) общее количество участвующих в обмене монет делится на 4, а с другой стороны, 6×2019 на 4 не делится.

З а м е ч а н и е. По сути всю совокупность обменов можно изобразить в виде мультиграфа, в котором каждому жителю соответствует некоторая вершина, а каждому обмену 4 ребра (вообще говоря, направленных). Число ребер такого графа, с одной стороны, равно $4 \cdot m$, где $m$ – общее число обменов, а с другой стороны, согласно условию а) должно быть равно 6×2019, но, очевидно, ни при каком $m$ равенство $4 \cdot m$ = 6×2019 не выполняется. В то же время для пункта б) требуемое условие может быть выполнено, что и показывает следующий пример.

б) Пример. Ставим всех жителей по кругу. Каждый дает по две 5-копеечные монеты следующему по часовой стрелке, и отдает предыдущему дважды по три монеты (достоинствами 2, 2 и 1 коп.).

4. В соревнованиях участвуют 10 спортсменов и работают трое судей. Результат каждого спортсмена определяется следующим образом: каждый судья по-своему распределяет между спортсменами места (с первого по десятое), после чего победителем считается фигурист с наименьшей суммой мест. Какое наибольшее значение может принимать эта сумма у победителя, если известно, что победитель единственный?

**Ответ:** 15

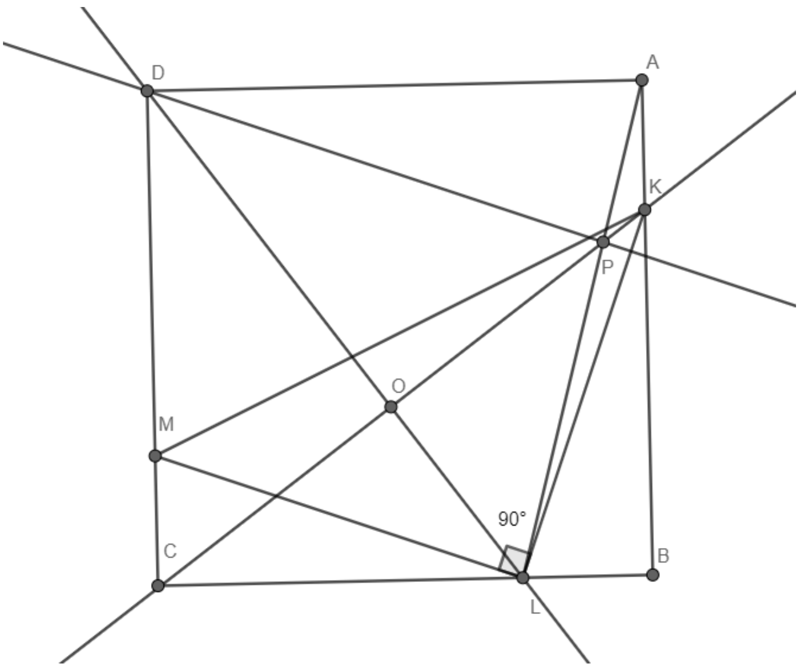
**Решение.** *Оценка*. Поскольку каждый из трёх судей распределил набор мест с первого по десятое, то сумма мест, присуждённых всеми судьями всем участникам соревнований, равна $3\cdot(1 + 2 + ... + 10) = 165$.

С другой стороны, если победитель получил сумму не меньше 16, то все остальные получили сумму мест не меньше 17, и рассматриваемая общая сумма не меньше чем $16 + 9\cdot17 = 169$. Противоречие. Следовательно, сумма мест победителя не больше 15.

*Пример*. См. таблицу:

| Судьи | Места | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| II | 10 | 8 | 9 | 3 | 5 | 1 | 2 | 7 | 4 | 6 |
| III | 6 | 7 | 4 | 9 | 5 | 10 | 8 | 2 | 3 | 1 |
| Сумма мест | 17 | 17 | 16 | 16 | 15 | 17 | 17 | 17 | 16 | 17 |

5. Точки *K, L* и *M* расположены на сторонах *AB, BC* и *CD* квадрата *ABCD* соответственно так, что треугольник *KLM* является равнобедренным прямоугольным треугольником с прямым углом при вершине *L*. Из точки *D* проведена прямая параллельная *LM*, которая пересекла отрезок *AL* в точке *P*. Под каким углом пересекаются прямые KP и DL?



**Решение.** $\angle$KLB=180°-90°-$\angle$MLC=$\angle$CML, аналогично $\angle$BKL=$\angle$MLC. Значит по второму признаку треугольники KBL и LCM равны. Откуда KB=LC и следовательно AK=LB, а значит. по первому признаку равны треугольники DAK и ABL. Т.к. это прямоугольные треугольники, то $\angle$AKD+$\angle$LAK=90° и это значит, что DK и AL перпендикулярны. DP и KL также перпендикуляры потому что DP параллельно ML. Значит P - ортоцентр в треугольнике DKL. Значит KP перпендикулярно DL.

6. а) Можно ли числа от 1 до 40 разбить на несколько групп так, что в каждой группе наибольшее число было равно сумме остальных чисел? б) Какое количество групп может быть?

**Ответ:** а) да, б) 12 или 13.

**Решение:** а) В каждой группе должно быть хотя бы 3 числа, значит всего групп не больше 13. Сумма всех чисел равна $20\times41=820$. Значит, сумма максимальных чисел, взятых из каждой группы, равна 410. Если групп будет 11 (или меньше), то сумма максимальных чисел не будет превосходить $30+31+...+40 = 70\times11/2 = 385 < 390$ (здесь рассматривается случай 11 групп). Получаем противоречие. Значит групп либо 12, либо 13.

Примеры (в обеих таблицах каждый столбик соответствует числам одной группы, причем наибольшее число группы стоит в верхней клетке, а остальные в нижней клетке соответствующего столбика).

Для 12 групп:

| 25 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13,12 | 28,2 | 27,4 | 26,6 | 24,9 | 18,16 | 23,5,7 | 21,14,1 | 22,15 | 10,17,8,3 | 20,19 | 29,11 |

Для 13 групп:

| 19 | 25 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 20 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,10 | 22,3 | 28,2 | 27,4 | 26,6 | 17,16 | 23,11 | 21,14 | 29,7 | 24,13 | 18,8,12 | 15,5 | 39,1 |