5-я Минская городская интернет-олимпиада по математике
среди учащихся 8-9 классов

Очный тур, 23 октября 2020 года

8 класс

1. У рабочего есть 15 гирь и весы. За одно взвешивание разрешается поставить на весы со стрелкой, показывающей вес груза, любые две гири и узнать их суммарный вес. Как за а) 15 взвешиваний; б) 9 взвешиваний узнать суммарный вес всех гирь?

Решение. Сделаем сразу **пункт б).** (*Решение* ***пункта а)*** *можно получить другим способом, см. решение задачи* 1 *из* 9 *класса*.)

Будем взвешивать на весах последовательно пары гирь: 1-ю и 2-ю, 3-ю и 4-ю и т.д., 13-ю и 14-ю, 15-ю и еще какую-нибудь, например, 1-ю. Это *уже восемь взвешиваний*. Просуммировав, мы получим сумму, в которой учитывается вес всех гирь, а 1-й даже дважды.

Взвесим еще 2-ю и 15-ю гири (*девятое взвешивание*). Тогда суммируя веса, полученные при первом, восьмом и девятом взвешивании, получим удвоенный вес трех гирь: 1-й, 2-й и 15-й. Поделив этот вес на 2 и добавив к ним еще суммарный вес гирь с 3-й по 14-ю (см. взвешивания со второго по седьмое), получим суммарный вес всех 15 гирь.

Заметим, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя, ибо в первых восьми взвешиваниях учитывался вес всех 15 гирь (а одной дважды), а вес всех гирь нужно учесть обязательно, а дополнительное – девятое взвешивание нужно, чтобы получить окончательный результат.

2. В школьном классе 5 рядов по 10 мест в каждом. В классе учится 26 детей. Утром у них был в школьном классе урок математики, а днем – урок русского языка. Докажите, что найдутся два ученика, которые на обоих уроках сидели в одном ряду.

Решение. Заметим, что на уроке математики в каком-то ряду обязательно сидело 6 школьников (принцип Дирихле). Однако на уроке русского языка – опять же по принципу Дирихле – из этих 6 школьников по крайней мере двое обязательно попадут на один ряд

3. Может ли разность квадратов двух простых чисел быть равна 748?

Ответ: нет.

Решение. Пусть искомые числа p и q. Заметим, что вычитаемое в указанной в условии разности не может быть ни 2^2, ни 3^2 так, как в этом случае разность квадратов p^2-q^2 давала бы: $p^2-2^2=748$ или $p^2-3^2=748$. В первом случае $p^2=752$, а во втором – $p^2=757$. Однако, $27^2=729<(757 \quad и \quad 748)<784=28^2$ т.е. эти числа не являются квадратами простых чисел. Значит простые числа, которые надо найти, представимы в виде $3n \pm 1$ и $3m \pm 1$ (они не кратны 3). Тогда $p^2 - q^2 = (3n \pm 1)^2 - (3m \pm 1)^2 = 9(n^2 - m^2) \pm 6n \mp 6m \Rightarrow \vdots 3$. А число 748 не делится на 3.

4. Основания равнобедренной трапеции равны a и b, причем $a > b$. Прямые, соединяющие середину меньшего основания с концами большего основания, пересекают диагонали трапеции в точках K и M. Найдите длину отрезка KM.

Ответ: $KM = 0{,}5 \cdot ab/(a+b)$.

Решение. Основная идея: Пусть $ABCD$ – трапеция с основаниями $AD = a$ и $BC = b$, E – середина основания BC, K – точка пересечения отрезков AE и BD, M – точка пересечения отрезков ED и AC.

Учитывая параллельность оснований трапеции из треугольников AKD и BKE, найдем отношение $AK{:}KE = a{:}b$. Аналогично найдем отношение $DM{:}ME$. Ясно, что эти отношения будут равны, а значит, по теореме обратной теореме Фалеса $KM \parallel BC$. Осталось найти отношение $AK{:}AE = KM{:}EC = a/(a+b)$, а отсюда найти $KM = 0{,}5 \cdot ab/(a+b)$.

5. Кащей Бессмертный предложил Василисе Премудрой сыграть в следующую игру. Василиса называет набор из 15 различных целых чисел, после чего Кащей выписывает все возможные суммы по 7 чисел из этого набора, а Василиса по 8 чисел. Василиса выигрывает, если получившиеся наборы чисел будут одинаковыми. Т.е. если у Кащея какая-то сумма встретится несколько раз, то и у Василисы она должна встретиться ровно столько раз. Может ли победить Василиса?

Ответ: может.

Решение. Василиса называет набор чисел -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7. Сумма всех эти чисел равна 0 (нулю). Покажем, как установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех наборов по 7 чисел и множеством всех наборов по 8 чисел, которое поможет обеспечить выигрыш Василисе.

Отметим следующее.

1) Если Кащей выбирает какой-то набор **A** из семи чисел с суммой a, то оставшиеся восемь чисел дадут набор **B** с суммой $-a$. Причем любым двум различным наборам $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$, выбранным Кащеем, будут соответствовать различные наборы по 8 оставшихся чисел $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$.

2) Если в пункте 1) для набора **A** выполняется $a = 0$, то Василиса ставит в соответствие набору **A** именно указанный набор **B.**

3) Если $a \neq 0$, то вместе с набором **A** среди указанных Кащеем будет набор **(–A)**, в котором используются все те же числа, что и в **A**, но с

противоположными знаками, и для которого сумма всех чисел равна –a. Аналогично для набора **B** построим набор **(–B)**. Тогда Василиса возьмет в соответствие набору **A** набор **(–B)**, а набору **(–A)** – набор **B**.

Как и в пункте 1) ясно, что различным наборам **A** будут соответствовать различные наборы **(–A)**, и аналогично для **B** и **(–B)**.

5-я Минская городская интернет-олимпиада по математике
среди учащихся 8-9 классов

Очный тур, 23 октября 2020 года

9 класс

1. У рабочего есть 15 гирь и весы со стрелкой, показывающей вес груза. За одно взвешивание разрешается поставить на весы любые две гири и узнать их суммарный вес. Как за 15 взвешиваний узнать веса всех гирь?

Решение. Будем взвешивать на весах последовательно пары гирь: 1-ю и 2-ю, 2-ю и 3-ю. 3-ю и 4-ю, и т.д., 14-ю и 15-ю, 15-ю и 1-ю.

Это как раз 15 взвешиваний. Покажем, как теперь можно найти веса всех гирь. Просуммировав веса, найденные во всех указанных взвешиваниях, мы получим удвоенную сумму всех гирь. Разделим эту сумму на два – получим сумму S весов всех гирь.

Теперь легко найти веса каждой отдельной гири. Например, для того, чтобы найти вес 1-й гири вычтем из S суммарные веса 2-й и 3-й, 4-й и 5-й, …, 14-й и 15-й гирь. И так далее.

2. Кащей Бессмертный предложил Василисе Премудрой сыграть в следующую игру. Василиса называет набор из 23 различных целых чисел, после чего Кащей выписывает все возможные суммы по 11 чисел из этого набора, а Василиса по 12 чисел. Василиса выигрывает, если получившиеся наборы чисел будут одинаковыми. Т.е. если у Кащея какая-то сумма встретится несколько раз, то и у Василисы она должна встретиться ровно столько раз. Может ли победить Василиса?

Ответ: может.

Решение. Ср. решение 5-й задачи для 8 класса.

3. Найдите все натуральные числа $n > 2$ такие, что $n = a^3 + b^3$, где a – наименьший натуральный делитель числа *n*, больший 1, b – какой-то натуральный делитель числа *n*.

Ответ: {16, 72, 520}

Решение. Если n – нечетное, то a и b также нечетные, но тогда сумма их кубов четна – противоречие. Значит n – четно. Значит наименьший делитель n равен 2 ($a = 2$). Значит b также четно. Пусть b=2k, тогда $n = 8(1+k^3)$ причем $n \,\vdots\, (2k)$. Однако, $(1+k^3)$ взаимно просто с k, значит $4 \vdots k$ и возможны три случая $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$.

1) k=1, b=2, n=16
2) k=2, b=4, n=72
3) k=4, b=8, n=65·8=520.

4. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD. Докажите, что если $\angle A = \angle D$, то диагонали четырехугольника равны.

Решение см. в отдельном jpg-файле, в котором во второй строчке рукописного текста описки: должно быть $\angle BAE = EBA$. Тогда, исходя из условия, как раз и получается $\angle BEA = CED$. Дальнейшее просто. На рисунке все изображено верно!

5. В квадрате 3×3 записаны числа 2011, 2012,…,2019 в каждой клетке по одному числу. Знайка посчитал среднее арифметическое чисел во всех четырех квадратах 2×2 и получил четыре натуральных числа. После чего он посчитал среднее арифметическое этих четырех чисел и вновь получил в результате натуральное число. Какое а) наибольшее и б) наименьшее число он мог в итоге получить?

Ответ: а) 2016; б) 2014..

Решение. Пусть в центре записано число С, в угловых клетках числа A_1, A_2, A_3, A_4, а в оставшихся (назовем их боковыми) – B_1, B_2, B_3, B_4 (см. рис. 1).

Рис. 1

A_1	B_1	A_2
B_2	C	B_3
A_3	B_4	A_4

Тогда среднее арифметическое всех чисел в левом верхнем квадрате 2×2 равно $\dfrac{A_1+B_1+B_2+C}{4}$ и аналогично в оставшихся квадратах 2×2. Но тогда среднее арифметическое полученных чисел равно:

$$\frac{A_1+A_2+A_3+A_4+2(B_1+B_2+B_3+B_4)+4C}{16}$$

Очевидно, что для того чтобы итоговое число было наибольшим в центр надо поставить С = 2019, а чтобы наименьшим – С = 2011.

Рассмотрим случай пункта а). Если С = 2019, то сумма всех оставшихся 8 чисел равна 16116. При этом 4С при делении на 16 дает остаток 12, а указанная сумма – остаток 4. А это значит, что для достижения искомого наибольшего итогового числа сумма $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ должна делиться на 16 нацело и при этом быть по возможности наибольшей. Для достижения последнего в качестве чисел B_k можно взять числа 2016, 2017, 2918 и 2013. Действительно искомая расстановка чисел в квадрате 3×3 находится, см. ниже на рис. 2.

Естественно пример подбирался так, чтобы и исходные средние арифметические в четырех квадратах 2×2 и итоговое были целыми (аналогично и для примера в следующем пункте, см. рис. 3).

Рассмотрим случай пункта б). Если С = 2011, то сумма всех оставшихся 8 чисел равна 16124. При этом 4С при делении на 16 снова дает остаток 12, и указанная сумма тоже дает остаток 12. А это значит, что для достижения искомого наименьшего итогового числа сумма $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ должна при делении на 16 давать остаток 8 и при этом быть по возможности наименьшей. Для достижения последнего в качестве чисел B_k можно взять числа 2012, 2013, 2014 и 2017. Действительно искомая расстановка чисел в квадрате 3×3 находится, см. рис. 3.

Рис. 2

2011	2016	2012
2018	2019	2017
2014	2013	2015

Рис. 3

2019	2012	2016
2014	2011	2013
2018	2017	2015