Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов

Очный тур, 20 октября 2017 года

8 класс

1. Найдите все натуральные числа, которые уменьшаются в 12 раз при зачеркивании в них последней цифры.

2. В полдень из пункта А в пункт Б выехал «Москвич». Одновременно из Б в А по той же дороге выехали «Жигули». Через час «Москвич» находился на полпути от А до «Жигулей». Когда он окажется на полпути от «Жигулей» до Б? (Скорости автомобилей постоянны и отличаются менее чем вдвое)

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отметили такие точки K и M, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

4. Два игрока по очереди ставят точки в клетки таблицы 7×7. За один ход ставится ровно одна точка. В одну клетку может быть поставлено несколько точек (ставить точки на границы клеток нельзя). Проигрывает тот, после чьего хода в клетках какой-то строки или столбца суммарно будут стоять 5 точек. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

5. Внутри выпуклого тысячеугольника выбрано 2017 точек так, что никакие три не лежат на одной прямой. Тысячеугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются вершины тысячеугольника и 2017 данных точек. Сколько получилось треугольников?

6. Найдите сумму дробей $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}} + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2017}}}}}.$$

Время написания – 4 часа.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Минская городская интернет-олимпиада по математике среди 8-9 классов

Очный тур, 20 октября 2017 года

9 класс

1. Сможете ли Вы приписать к числу 20162016 справа а) три цифры, б) две цифры так, чтобы полученное число одновременно делилось на 20 и на 17? Ответ поясните (в частности, если ваш ответ – да, то укажите все возможные варианты, если нет – докажите это).

2. Найдите значение выражения $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{3}] + \ldots + [\sqrt[3]{2017}]$, где $[a]$ означают целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Два игрока по очереди ставят точки в клетки таблицы 2017×2017. За один ход ставится ровно одна точка. В одну клетку может быть поставлено несколько точек (ставить точки на границы клеток нельзя). Проигрывает тот, после чьего хода в клетках какой-то строки или столбца суммарно будут стоять 2017 точек. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке BC выбрана точка D, а на продолжении отрезка AB за точку B — точка E, причём $AD = DC$ и $AE = EC$. Прямые AD и CE пересекают прямую BH в точках D_1 и E_1 соответственно. Докажите, что $2DE = D_1E_1$.

5. Существуют ли нечетные числа x, y, z такие, что значения выражений $xy + 1$, $yz + 1$, $xz + 1$ – полные квадраты?

6. На плоскости проведено n прямых так, что каждая прямая пересекается ровно с 2017 из них. Найдите все возможные значения n.

Время написания – 4 часа.

Пользоваться калькулятором не разрешается.