3-я Минская городская интернет-олимпиада по математике
среди учащихся 8-9 классов

Очный тур, 19 октября 2018 года

8 класс

Ответы и решения

1. Найдите значение выражения:

$$\frac{(1\cdot 6+6)(3\cdot 8+6)(5\cdot 10+6)\ldots(2013\cdot 2018+6)(2015\cdot 2020+6)}{(2\cdot 7+6)(4\cdot 9+6)\ldots(2014\cdot 2019+6)}.$$

Ответ: $6054 = 3\cdot 2018$.

Идея решения (так может решать школьник, не умея находить корни)

$$n(n+5)+6 = n^2+2n+3n+6 = n(n+2)+3(n+2) = (n+2)(n+3)$$

$$\frac{(1\cdot 6+6)(3\cdot 8+6)(5\cdot 10+6)\ldots(2013\cdot 2018+6)(2015\cdot 2020+6)}{(2\cdot 7+6)(4\cdot 9+6)\ldots(2014\cdot 2019+6)} =$$

$$= \frac{(3\cdot 4)(5\cdot 6)(7\cdot 8)\ldots(2015\cdot 2016)(2017\cdot 2018)}{(4\cdot 5)(6\cdot 7)\ldots(2016\cdot 2017)} = 3\cdot 2018$$

2. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них является целым числом. На какое наименьшее натуральное число надо умножить их произведение, чтобы в результате получилось целое число?

Ответ: 8.

Решение: Пусть данные числа a, b, c,
Причем a + b = n, b+c = m, c + a = k (все значения сумм целые). Отсюда легко получить, что 2(a + b + c) = m + n + k, и далее, что a = 0,5(n + k – m), b = 0,5(m + n – k), c = 0,5(m + k – n), т.е. все числа – «полуцелые» (простейший пример – все числа равны ½.
Отсюда ответ, нужно умножить на 8 (наименьшее).

3. Можно ли расставить числа 1, 2, …, 8 а) по кругу б) в ряд так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих рядом, сумма не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Ответ: а) нет, б) да, см. пример ниже.

Идея решения: *По кругу нельзя из-за того, что рядом с 2 можно поставить лишь 6, а в ряд расставляется: 2, 6, 5, 8, 3, 1, 7, 4.*

4. Дана полоска размером 1 × 2018. Двое играют в такую игру: за один ход первый игрок закрашивает в черный цвет любой прямоугольник 1 × 4, а второй игрок – любой прямоугольник 1 × 3. Закрашивать уже закрашенные поля запрещается. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Ответ: выиграет второй игрок.

Идея решения: *на своем первом ходу второй игрок так закрасит свои три клетки, чтобы отсечь от какого-нибудь края ровно три клетки (сюда первый игрок «походить» уже не сможет). Эти три клетки второй будет беречь для последнего хода – а в оставшееся пространство полоски ему можно ходить как угодно (если до последнего хода еще есть место для первого игрока, то и для второго тоже, а когда уже места не будет, то для второго игрока есть этот резервный ход).*

5. В остроугольном треугольнике ABC: ∠A = 30°; BB_1 и CC_1 – высоты; B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пресекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2?

Ответ: под прямым углом.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABB_1, B_1C_2 – его медиана (см. рис. 3а). По свойству прямоугольного треугольника $B_1C_2 = \frac{1}{2}AB = AC_2$. Следовательно, треугольник AC_2B_1– равнобедренный с углом 30° при основании, значит, $\angle AC_2B_1 = 120°$. Аналогично, C_1B_2 – медиана прямоугольного треугольника ACC_1 (см. рис. 3б), поэтому $C_1B_2 = \frac{1}{2}AC = AB_2$. Следовательно, треугольник AB_2C_1– также равнобедренный с углом 30° при основании. Рассмотрим треугольник C_1C_2D, где D – точка пересечения отрезков B_1C_2 и C_1B_2 (см. рис. 3в). Пусть $\angle C_1DC_2 = x$. По теореме о внешнем угле треугольника $x + 30° = 120°$. Следовательно, искомый угол между прямыми B_1C_2 и C_1B_2равен 90°.

6. В последовательности цифр каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предыдущих. Последовательность начинается с цифр 1234096… Может ли в ней встретиться комбинация цифр 1999?

Ответ. Нет.

Решение. Заменим в нашей последовательности четные числа нулями, а нечетные единицами. При этом по-прежнему каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предыдущих (сложение осуществляется по правилу: 0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=10, то есть как в двоичной системе счисления). Выпишем начало последовательности: (10100)(10100)… Видно, что одна и та же комбинация цифр будет повторяться в этой последовательности до бесконечности, и никаких других комбинаций появиться не может. 1999 превратилось бы в 1111, а такой комбинации, очевидно, в последовательности нет.

3-я Минская городская интернет-олимпиада по математике
среди учащихся 8-9 классов

Очный тур, 19 октября 2018 года

9 класс

Ответы и решения

1. Есть три сосуда 3 л, 4 л и 5 л без делений, кран с водой, раковина для слива жидкости и 3 л сиропа в самом маленьком сосуде. Можно ли с помощью переливаний получить 6 л смеси воды с сиропом так, чтобы в каждом сосуде воды и сиропа было поровну?

Ответ – да. Решение. Перельем весь сироп в 4-л сосуд. При помощи 3-л и 5-л сосудов отмерим 2 л воды (они будут в пятилитровом сосуде). Теперь снова перельем сироп в 3-л сосуд, а полученные до этого 2 л воды – в 4-л. Дольем 4-л сосуд доверху сиропом, а оставшийся 1 л сиропа перельем в 5-л сосуд. Из 4-л сосуда, где у нас уже необходимая нам смесь, отольем 3 л этой смеси в 3-л сосуд. Эти 3 л дольем в 5-л сосуд, где уже есть 1 л чистого сиропа. Теперь там 4 л смеси, где 1,5 л воды и 2,5 л сиропа. Дольем этот сосуд доверху водой, получим еще 5 л нужной смеси (еще 1 л, как мы помним, остался в 4-л сосуде). А чтобы смесь была в каждом сосуде, можно теперь часть смеси (неважно какую, главное – не более 3 л) перельем в пустой 3-л сосуд. Задача решена.

2. По кругу записано n целых чисел, сумма которых равна 2018. Известно, что любое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Найдите все возможные значения n.

Ответ: $n = 3027$ или $n = 3$.
Решение. Ясно, что все числа неотрицательны. Пусть a – наибольшее из них. Тогда два следующих за ним – или 0, a, или a, 0. И в том, и в другом случае несложно убедиться, что числа записаны по кругу следующим образом: a, a, 0, a, a, 0, …, a, a, 0. Таким образом, число 2018 делится на $2a$, и следовательно, число a равно 1 или 1009. В первом случае $n = 3027$, а во втором $n = 3$.

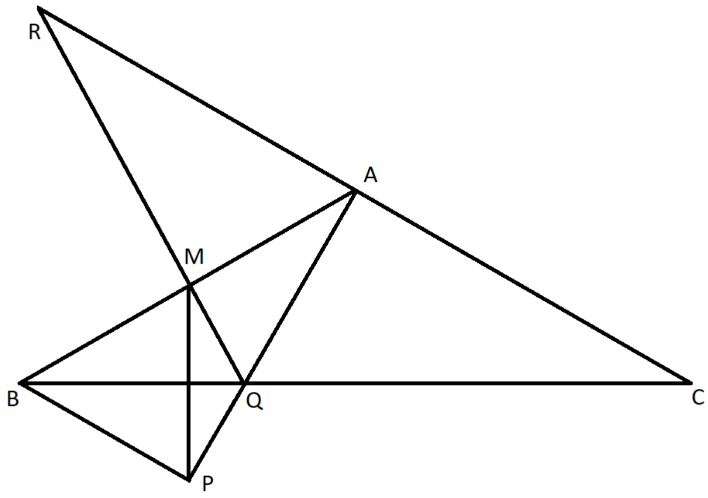
3. Найдите все пары чисел (p, m), где p – простое, m – натуральное, такие, чтобы выполнялось равенство: $2p + 1 = m^3$.

Ответ. $\boldsymbol{p}=13$ и $2\boldsymbol{p} + 1=27=3^3$.
Решение. Докажем, что из всех целых чисел вида $2\boldsymbol{p} + 1$, где $\boldsymbol{p}$ простое число, только одно число является точным кубом.
Из уравнения $2\boldsymbol{p} + 1=(2\boldsymbol{x}+1)^3$
(Примечание: если восьмой класс не знает формулы возведения в третью степень, то может перемножить три скобки $=(2\boldsymbol{x}+1)(2\boldsymbol{x}+1)(2\boldsymbol{x}+1)$)
следует, что

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{x}(4\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}+3).$$

и так как $4\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}+3>1$ при $\boldsymbol{x}>0$, то $\boldsymbol{x} =1$, следовательно $\boldsymbol{p}=13$ и $2\boldsymbol{p} + 1=27=3^3$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 120°. Точка M – середина стороны AB. Точка P симметрична точке M относительно стороны BC. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Прямые QM и AC пересекаются в точке R. Чему равно отношение отрезков MR:AP?



В силу симметрии точки P отрезки BM=BP, QP=QM, а BQ – биссектриса угла MBP. Значит BMP – равнобедренный треугольник с углом 60° напротив основания и, следовательно, равносторонний. Откуда PM=BM=MA и значит треугольник BPA прямоугольный (медиана равна половине стороны, на которую опущена). Значит угол QPM=90°-60°=30° и в силу равнобедренности треугольника PQM угол BMQ=60°+30°=90°, а значит треугольник RMA – прямоугольный. Угол RAM=180°-120°=60°. Значит треугольники RMA и BPA равны по катету и острому углу. Откуда имеем отношение MR:AP=1

5. а) Дана полоска размером 1×2018. Двое играют в такую игру: за один ход первый игрок закрашивает в черный цвет любой прямоугольник 1×4, а второй игрок – любой прямоугольник 1×3. Закрашивать уже закрашенные поля запрещается. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть? б) Такой же вопрос, но игра проходит на поле 2018×2018.

Ответ: в обоих пунктах выиграет второй игрок.

Идея решения: а) на своем первом ходу второй игрок так закрасит свои три клетки, чтобы отсечь от какого-нибудь края ровно три клетки (сюда первый игрок «походить» уже не сможет). Эти три клетки второй будет беречь для последнего хода – а в оставшееся пространство полоски ему можно ходить как угодно (если до последнего хода еще есть место для первого игрока, то и для второго тоже, а когда уже не будет места, то для второго есть этот резервный ход).

б) В одном из углов второй игрок на своем первом ходу «отгородит» участок шириной в две клетки, см. рис.

У	Z	X			…
У	Z	X			…
У	Z	X			…

Теперь легко видеть, что как бы после этого не пошел первый игрок, второй своим вторым ходом сможет «отгородить» три клетки в левом столбце или столбце рядом с ним (обозначены у-ками и z-ами)? И далее как в пункте а)

6. Известно, что некоторое действительное *a* удовлетворяет соотношению $a+\frac{1}{a}=2018$. Найдите все натуральные значения *n*, при которых значение выражения $a^n+\frac{1}{a^n}$ также является целым числом.

Ответ. При всех натуральных *n*.

Решение. При n = 1 по условию. Возведем данное равенство в квадрат, получим: $a^2+\frac{1}{a^2}+2=2018^2$, откуда имеем: $a^2+\frac{1}{a^2}=2018^2-2$, т.е. $a^2+\frac{1}{a^2}$ - целое число.

Домножим теперь последнее равенство на исходное $(a^2+\frac{1}{a^2})(a+\frac{1}{a})=a^3+\frac{1}{a^3}+a+\frac{1}{a}=(2018^2-2)\cdot 2018$, откуда легко получаем, что $a^3+\frac{1}{a^3}$ - тоже целое. Это процесс (по сути, записав в виде матем. индукции) можно продолжать для всех n.