

№ 1 (2 балла)

Девочки загадали по числу (см. в таблице). У чисел Оли и Зои одинаковые цифры в разряде сотен, а у чисел Лены и Зои одинаковые цифры в разряде десятков. Какое число задумала Маша?

Решение.

Для решения данной задачи весь ход логических рассуждений можно проделать в уме, а можно использовать схему.

Запишем имена девочек в первой строке, а под ними – все наши числа. Анализируя последовательно «обязательные условия», будем вычёркивать неподходящие варианты, пока не установим нужное соответствие.

Зоя	Маша	Лена	Оля
5347	5347	5347	5347
464	464	464	464
248	248	248	248
1386	1386	1386	1386

Первое обязательное условие: «У чисел Оли и Зои одинаковые цифры в разряде сотен». Сотни – это 3-я цифра, если считать справа налево. Видим, что это цифра «3» в числах 5347 и 1386. Значит, эти числа вычёркиваем у девочек, которые «не Оля» и «не Зоя», т.е. у Маши и Лены. (См. таблицу).

Второе обязательное условие: «У чисел Лены и Зои одинаковые цифры в разряде десятков». Десятки – это вторая цифра, если считать справа налево. Видим, что это цифра «4» в числах 5347 и 248. Значит, эти числа вычёркиваем у девочек, которые «не Лена» и «не Зоя», т.е. у Маши и Оли. (См. таблицу).

Очевидно, что в каждой строке и в каждом столбце будет только одно взаимное соответствие. Т.е., если три числа вычеркнуты в строке или в столбце, то четвертое (последнее) – это то, которое мы ищем. В столбце «Маша» вычеркнуты три числа, осталось только число 464. Значит, Маша загадала число 464. По условию, каждая девочка загадала своё число, значит числа 464 не может быть у остальных девочек, и во всех остальных столбиках мы можем его вычеркнуть. Аналогичным образом заполняем до конца таблицу. Итоговый вид таблицы представлен ниже.

Зоя	Маша	Лена	Оля
<u>5347</u>	5347	5347	5347
464	<u>464</u>	464	464
248	248	<u>248</u>	248
1386	1386	1386	<u>1386</u>

Осталось перенести данные из нашей таблицы в поле для ответов.

5347	464	248	1386
У Зои	Машино число	У Лены	У Оли

Ответ: 464

№ 2 (4 балла)

Крокодил Гена и Чебурашка построили дом для друзей. Им необходимо поставить стекло в оконной раме. Одну сторону стекла измерили точно - 150 см, а другую измерить точно им не удалось. У них получилось 190 см с погрешностью ± 10 см.

В магазине они стали выбирать стёкла. Площадь первого 323 дм^2 , а одна из его сторон – 17 дм. Стороны второго – 25 дм и 15 дм, третьего – 16 дм и 22 дм.

Стоимость одного квадратного метра стёкол была одинакова. Выберите стекло, которое им следует купить, с учётом наименьшей цены. (*Ясно, что стекла можно обрезать, чтобы подогнать под нужный размер*).

Решение.

Из условия следует, что размеры стекла, которое нужно купить Гене и Чебурашке, точно определить не удалось. С учётом указанной погрешности это либо стекло с размерами 150 см и 180 см, либо стекло с размерами 150 см и 200 см. Чтобы наверняка (точно, гарантированно) застеклить окно, ориентироваться нужно на бОльшие размеры. Т.е. стороны стекла, которое подойдёт Гене и Чебурашке, должны быть не менее чем 150 см и 200 см.

Стёкол, которые продаются в магазине, три. Нам известны площадь и одна из сторон первого, а также размеры (длина и ширина) второго и третьего, указанные в дм. Чтобы помочь Гене и Чебурашке сделать правильный выбор, переведём в дм размеры стекла которое мы ищем (150 см и 200 см) и найдём его площадь. Стороны стекла будут равны 15 дм и 20 дм (1 дм = 10 см). Найдём его площадь. Чтобы найти площадь прямоугольника, необходимо длину умножить на ширину ($S = a \cdot b$).

1) $15 \cdot 20 = 300 \text{ дм}^2$ - площадь искомого стекла;

Площадь первого стекла нам известна из условия – 323 дм^2 . Также нам известно, что одна из его сторон равна 17 дм. Чтобы проверить, подходит ли нам (Гене и Чебурашке) это стекло, нужно найти вторую сторону.

2) $323 : 17 = 19 \text{ дм}$ – длина первого стекла.

Если бы мы смотрели только по площади, то $323 \text{ дм}^2 > 300 \text{ дм}^2$, и стекло №1 нам бы подходило. Но по размерам длины и ширины (19 дм и 17 дм) мы видим, что стекло нам не подходит. Сторону 15 дм мы можем отрезать, а для стороны 20 дм – не хватает 1 см.

Найдём площади второго и третьего стёкол. По размерам длины и ширины они подходят оба. А поскольку стоимость одного квадратного метра

стёкол одинакова (из условия), Гене и Чебурашке необходимо выбрать кусок, площадь которого меньше, чтобы меньше за него заплатить.

3) $25 \cdot 15 = 375 \text{ дм}^2$ - площадь второго стекла;

4) $16 \cdot 22 = 352 \text{ дм}^2$ - площадь третьего стекла;

$375 \text{ дм}^2 > 352 \text{ дм}^2$, поэтому покупать нужно третье стекло с размерами 16 дм и 22 дм и площадью 352 дм^2 , поскольку его покупка обойдётся друзьям дешевле.

Ответ: надо покупать третье стекло с размерами 16 дм и 22 дм.

№ 3 (4 баллов)

На далёкой планете Чудесан время считают не так, как на Земле. Сутки там длятся 15 часов по 60 минут, неделя – 5 суток, месяц – 3 недели, а год – 13 месяцев. Мальчику Мише на Земле исполнится год, а девочке Моме на Чудесане – 3 года. Кто из них старше?

Решение.

Обратим внимание, что и на Земле 1 час длится 60 минут, и на Чудесане 1 час длится 60 минут. А сравнить мы можем только величины, имеющие одинаковые единицы измерения. Остальные единицы измерения времени на Земле и Чудесане будут различны, поэтому для того, чтобы сравнить возраст детей, мы должны перевести в часы возраст Миши и Момы.

Нам известно, что продолжительность года (в днях / сутках) на Земле составляет 365 дней в обычный год и 366 дней – в високосный. Тогда Миша, которому исполнился на Земле 1 год, прожил $365 \text{ суток} \cdot 24 \text{ часа} = 8760 \text{ часов}$ в обычный год (и $366 \text{ суток} \cdot 24 \text{ часа} = 8784 \text{ часа}$ – в високосный).

Определим продолжительность года (в днях / сутках) на Чудесане и узнаем, сколько часов прожила девочка Мома, если сейчас ей 3 года.

$1 \text{ месяц} = 3 \text{ недели} \cdot 5 \text{ суток} = 15 \text{ суток};$

$1 \text{ год} = 13 \text{ месяцев} \cdot 15 \text{ суток} = 195 \text{ суток};$

Возраст Момы в часах $= 3 \text{ года} \cdot 195 \text{ суток} \cdot 15 \text{ часов} = 8775 \text{ часов}.$

Сравним возраст детей:

Миша – 8760 часов (обычный год) $<$ Мома – 8775 часов

Мы видим, если год обычный, то старше девочка Мома.

Миша – 8784 часа (високосный год) $>$ Мома – 8775 часов

Если бы год был високосным, то старше был бы мальчик Миша.

Ответ: Если год состоит из 365 дней, то больше прожила девочка Мома, если же год состоит из 366 дней, то больше прожил мальчик Миша.

№ 4 (5 баллов)

На факультативе по математике учитель заметил, что на запись одной цифры школьники тратят 2 секунды. Сколько понадобится времени (в секундах), чтобы записать подряд все цифры

а) от 3 до 9; б) от 3 до 20; в) от 50 до 120?

Решение.

Заметим, что для записи однозначных цифр и чисел совпадают, для написания одного двузначного числа требуется уже две цифры, для написания одного трёхзначного – сразу 3 цифры. Числа от 3 до 9 – однозначные. Для их записи понадобится количество цифр, равное количеству чисел.

а) всего цифр $9-3+1=7$ на запись которых понадобится $7*2=14$ сек;

б) от 10 до 20 всего $20-10+1=11$ двузначных чисел (т.е. понадобится для записи $11*2=22$ цифры) на запись которых понадобится $22*2=44$ секунды. Тогда на запись чисел от 3 до 20 понадобится $14+44=58$ секунд;

в) от 50 до 99 всего $99-50+1=50$ двузначных чисел (т.е. $50*2=100$ цифр) для записи которых понадобится $100*2=200$ сек. От 100 до 120 всего $120-100+1=21$ трёхзначное число (т.е. $21*3=63$ цифры) для записи которых понадобится $63*2=126$ сек. Таким образом, всего понадобится $200+126=326$ сек

Ответ: а) 14 сек; б) 58 сек; в) 326 сек.

Комментарий. Чтобы посчитать количество чисел от 3 до 9 можно составить следующую таблицу

Сами числа	3	4	5	6	7	8	9
Их количество	1	2	3	4	5	6	7

Видно, что чисел $7=9-3+1=$, а не $9-3=6$. Этой идеей можно воспользоваться и при остальных подсчетах.

№5 (4 балла)

В Минске построили новую улицу «Математиков», где все дома расположили в одну линию. Через год, решив, что надо построить ещё дома, между каждыми двумя домами построили ещё по одному дому. Ещё через год снова повторили такую застройку. В итоге на улице стало 65 домов. Какое количество домов было первоначально построено на улице «Математиков»?

Ответ: 17.

Решение.

Будем решать задачу, используя ход с конца. 65 домов на улице стало после того, как между каждыми двумя соседними домами построили ещё по одному дому. Применим метод крайнего, рассмотрим этот случай на меньшем участке. Допустим, после того, как между соседними домами достроили по одному дому, их стало 5. Сколько домов было первоначально?



Вспомним, что количество объектов, расположенных в ряд, если эти объекты стоят в том числе и по краям, на один больше, чем количество промежутков между ними. Или количество промежутков на один меньше, чем количество объектов, которые эти промежутки соединяют. На картинке выше мы видим 5 объектов – домов. И между ними мы можем достроить ещё 4 дома, если будем действовать так, как написано в задаче. Вместе с тем мы видим, что до того, как мы совершили процедуру достраивания, домов было 3, а промежутков – на один меньше – два. На их месте мы и построили два новых дома.

Вернемся к нашей задаче. Мы имеем 65 домов, которые мы получили в результате того, как два раза достраивали дома на месте промежутков между уже имеющимися домами. Год назад старых домов (объектов) было на один больше, чем тех, которые мы достроили (на месте промежутков между двумя соседними домами). Т.е. $65 = 33 + 32$ дома. 33 старых и 32 новых.

Еще год назад в результате такой же застройки мы получили 33 дома. $33 = 17 + 16$ домов. 17 старых и 16 новых. Т.е. первоначально на улице Математиков стояло 17 домов.

№ 6 (4 балла)

За завтраком Дюймовочка съела два лепестка розы, два кукурузных зёрнышка и запила тремя каплями росы. Мальчик-с-пальчик съел четыре лепестка розы, три кукурузных зёрнышка и выпил шесть капель росы. После этого Дюймовочка поправилась на 14 граммов, а Мальчик-с-пальчик поправился на 25 граммов. Сколько граммов весит зёрнышко кукурузы?

Ответ: 3гр.

Решение.

Вариант 1. Еда Дюймовочки: $2\text{Роз} + 2\text{Зёрн} + 3\text{Кап} = 14\text{гр}$

Значит, если бы она съела в два раза больше, то и поправилась бы в два раза больше т.е. $4\text{Роз} + 4\text{Зёрн} + 6\text{Кап} = 28\text{гр}$

Еда Мальчика-с-пальчик: $4\text{Роз} + 3\text{Зёрн} + 6\text{Кап} = 25\text{гр}$

Так как разница у них в 1 Зёрнышко, то оно весит $28 - 25 = 3\text{гр}$

Вариант 2.

Запишем числовые данные из задачи в виде таблицы

	Лепестки розы	Зёрна кукурузы	Капли росы	Граммы
Еда Дюймовочки	2 шт.	2 шт.	3 шт.	= 14 г
Еда Мальчика-с-пальчик	4 шт.	3 шт.	6 шт.	= 25 г

Теперь внимательно посмотрим на таблицу и попытаемся сделать какие-нибудь выводы. Если Дюймовочка съест в 2 раза больше еды, то и поправится в 2 раза больше, т.е. будет весить 28 г. Тогда наша таблица будет иметь следующий вид:

	Лепестки розы	Зёрна кукурузы	Капли росы	Граммы
Еда Дюймовочки	$2 \cdot 2 = 4$ шт.	$2 \cdot 2 = 4$ шт.	$3 \cdot 2 = 6$ шт.	$14 \cdot 2 = 28$ г
Еда Мальчика-с-пальчик	4 шт.	3 шт.	6 шт.	25 г

Теперь Дюймовочка весит 28 г, а Мальчик-с-пальчик – 25 г. При этом оба они съели по 4 лепестка розы, выпили по 6 капель росы, а разницу в их обеде составляет 1 зёрнышко кукурузы (Дюймовочка съела 4 шт., а Мальчик-с-пальчик – 3 шт.). И Дюймовочка при этом стала на 3 г тяжелее Мальчика-с-пальчик. Значит, 1 зёрнышко кукурузы весит 3 г.

№ 7 (10 баллов)

А) Можно ли расставить в клетках таблицы 5×6 , состоящей из 5 строк и 6 столбцов, числа от 1 до 30 так, чтобы суммы чисел во всех строках были равны?

Б) А так, чтобы суммы чисел во всех столбцах были равны, сможете?!
Если нет, то попробуйте объяснить, если – да, то приведите пример.

Ответ: А) пример приведен ниже Б) так сделать не получится.

Решение. Так как сумма всех чисел равна $30 \cdot 31/2 = 465$ и эта сумма нечётная и не делится нацело на 6, то в пункте б) так сделать не получится.

1	10	11	20	21	30
2	9	12	19	22	29
3	8	13	18	23	28
4	7	14	17	24	27
5	6	15	16	25	26

Покажем как можно рассуждать при решении данной задачи.

Найдём сумму всех чисел от 1 до 30: $1+2+3+\dots+30=465$

А) Чтобы ответить на вопрос, заданный в пункте А), разделим 465 на 5 строк и получим 93. 93 – это 31, взятое 3 раза. Т.е., нам достаточно расставить в каждую строку по три пары чисел, равностоящих от начала и конца нашего числового ряда (маленькое + большое). Способы расстановки могут быть разными, но пары чисел, дающие в сумме 31, будут одни и те же. На вопрос, заданный в пункте А), мы отвечаем утвердительно: Да, в клетках таблицы 5×6 , состоящей из 5 строк и 6 столбцов, мы можем расставить числа от 1 до 30 так, чтобы суммы чисел во всех строках были равны. Выше приведён один из способов расстановки.

Б) Расставить эти же числа так, чтобы суммы чисел во всех столбцах таблицы были равны, мы не можем, так как число 465 (сумма всех чисел от 1 до 30) нечётное, поэтому понятно, что оно не делится нацело на 6 столбцов рассматриваемой таблицы.

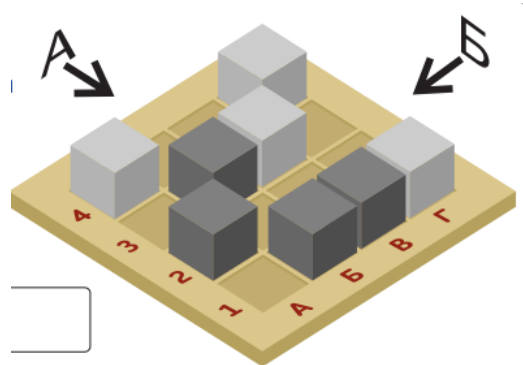
№ 8 (6 баллов)

На столе лежат кубики, как показано на рисунке.

Переложите один из кубиков на свободное поле так, чтобы вид фигуры с направлений А и Б совпадали.

В ответе укажите исходные координаты кубика и координаты, куда его нужно переместить. (Например кубик Б1 переместить на Б2)

При этом имейте в виду, что два вида, изображенных на нижеприведенном рисунке, различны!



Укажите все возможные ответы.

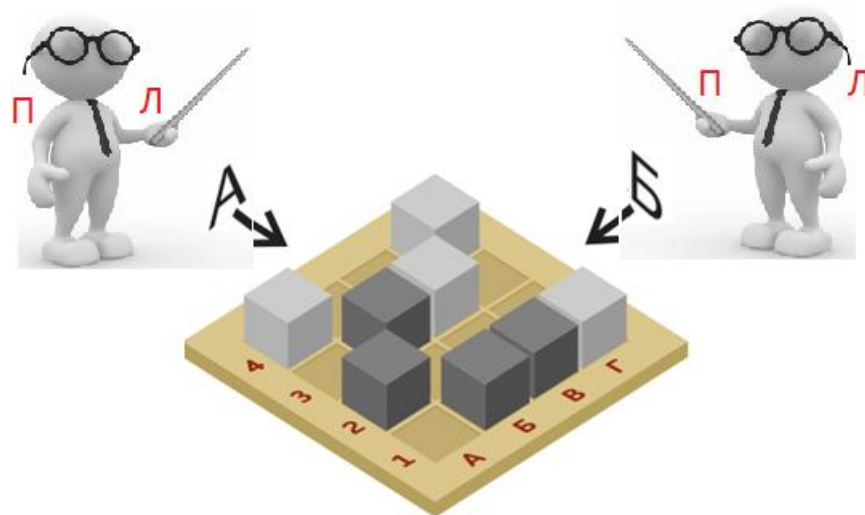
Решение.

Позиция А

Чтобы правильно решить предложенную задачу, необходимо мысленно поместить себя вначале в позицию, указанную буквой А. Т.е. самому как бы стать лицом к столу (вместо буквы А), на котором лежат кубики, и «прочитать» их цветовое расположение СЛЕВА НАПРАВО. Важно, что и «читать» расположение кубиков нужно слева направо (ББЧБ), и зарисовывать на бумаге вид А тоже нужно слева направо (ББЧБ). См. картинку.

Ч – чёрный, Б – белый, Л – лево, П – право.

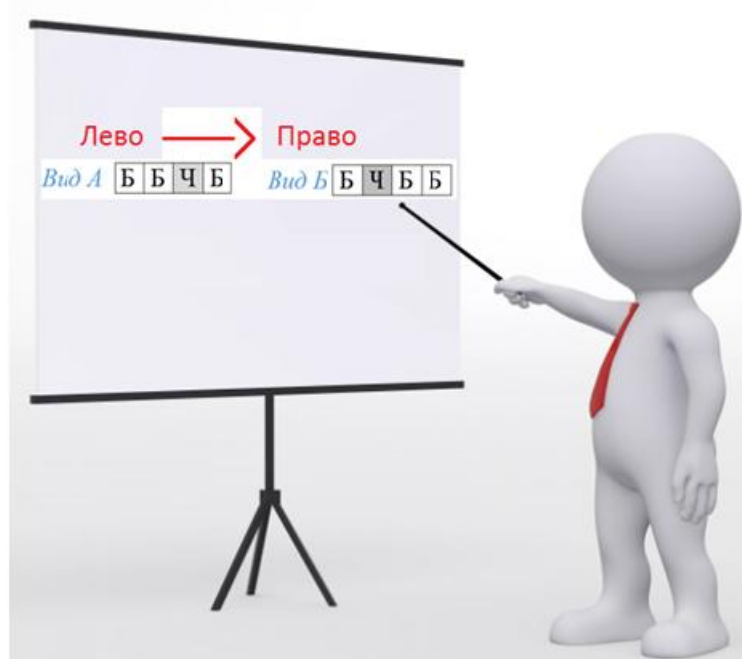
Здесь мы «читаем» расположение кубиков



Позиция Б

Далее мысленно помещаем себя в позицию, указанную буквой Б. Тоже располагаемся из этой позиции лицом к столу. Называем цвета кубиков, которые мы видим, слева направо (БЧББ). И на бумаге записываем их расположение тоже слева направо (БЧББ).

Здесь мы записываем расположение кубиков



Таким образом, в исходном положении кубики имеют вид:

Вид А

Б	Б	Ч	Б
---	---	---	---

Вид Б

Б	Ч	Б	Б
---	---	---	---

При наложении картинок друг на друга совпадает по цвету только первая и последняя клетки белого цвета. Наша задача – переложить один из кубиков на свободное поле так, чтобы все четыре клетки, зарисованные слева направо, при наложении картинок друг на друга совпадали.

Перебрав возможные варианты, находим 3 варианта ответа.

1) Если белый кубик, расположенный в ячейке В3, переместить в ячейку А1, то вид фигуры и с направления А, и с направления Б будет читаться и записываться как БЧЧБ. Т.е. виды с позиций А и Б совпадут.

Вид А

Б	Ч	Ч	Б
---	---	---	---

Вид Б

Б	Ч	Ч	Б
---	---	---	---

2) Этот же кубик, расположенный в ячейке В3, можно переместить в ячейку А3. И опять оба вида совпадут:

Вид А

Б	Ч	Ч	Б
---	---	---	---

Вид Б

Б	Ч	Ч	Б
---	---	---	---

3) Если же кубик, расположенный в ячейке В3 переместить в ячейку В2, то с позиций А и Б будет следующий вид:

Вид А

Б	Б	Ч	Б
---	---	---	---

Вид Б

Б	Б	Ч	Б
---	---	---	---

Ответ : В3 переместить на А1

В3 переместить на А3

В3 переместить на В2

(При необходимости продолжите ответ.)

№ 9 (8 баллов)

Известно, что Винни-Пух и Карлсон очень любят варенье!

Встретились они как-то в гостях у Пятачка и заметили на полке 5 банок с вареньем – однолитровую, двухлитровую, трехлитровую, четырехлитровую и пятилитровую. Для того, чтобы друзья не спорили, Пятачок разрешил им съедать за один присест одновременно по одинаковому – целому числу литров из любой банки по выбору каждого из них (но за один присест каждый ест из одной выбранной им на этот присест банки).

А) Смогут ли, за несколько «присестов» Винни-Пух и Карлсон съесть все варенье, не нарушая правила, установленного Пятачком? (Ответ объясните.)

Б) Предложите порядок, в котором они будут съедать варенье в случае, если съесть можно (т.е. из каких банок и по сколько литров им нужно для этого есть?!), либо, в противном случае, укажите наименьшее число литров, которое они могут оставить. *(Опишите это, заполняя таблицу; при необходимости добавьте строки.)*

В) Найдите наименьшее необходимое число «присестов» для съедания всего варенья и достижения требуемого в пункте Б) условия (Ответ объясните.)

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	← Банки	↓ Действия
1л	2л	3л	4л	5л	←	Так было в начале
1	2	3	0	1		Съели по 4 литра из 4-й и 5-й банок
1	0	1	0	1		Съели по 2 литра из 2-й и 3-й банки
1	0	0	0	0		Съели по 1 литру из 3-й

					и 5-й банки
					Съели по из банок
					Съели по из банок

Решение и ответ: Так как сумма чисел $1+2+3+4+5=15$, а гости съедают по одинаковому числу литров (т.е. по четному числу литров вместе), то все 15 литров съесть у них не получится. Значит минимум останется 1 литр

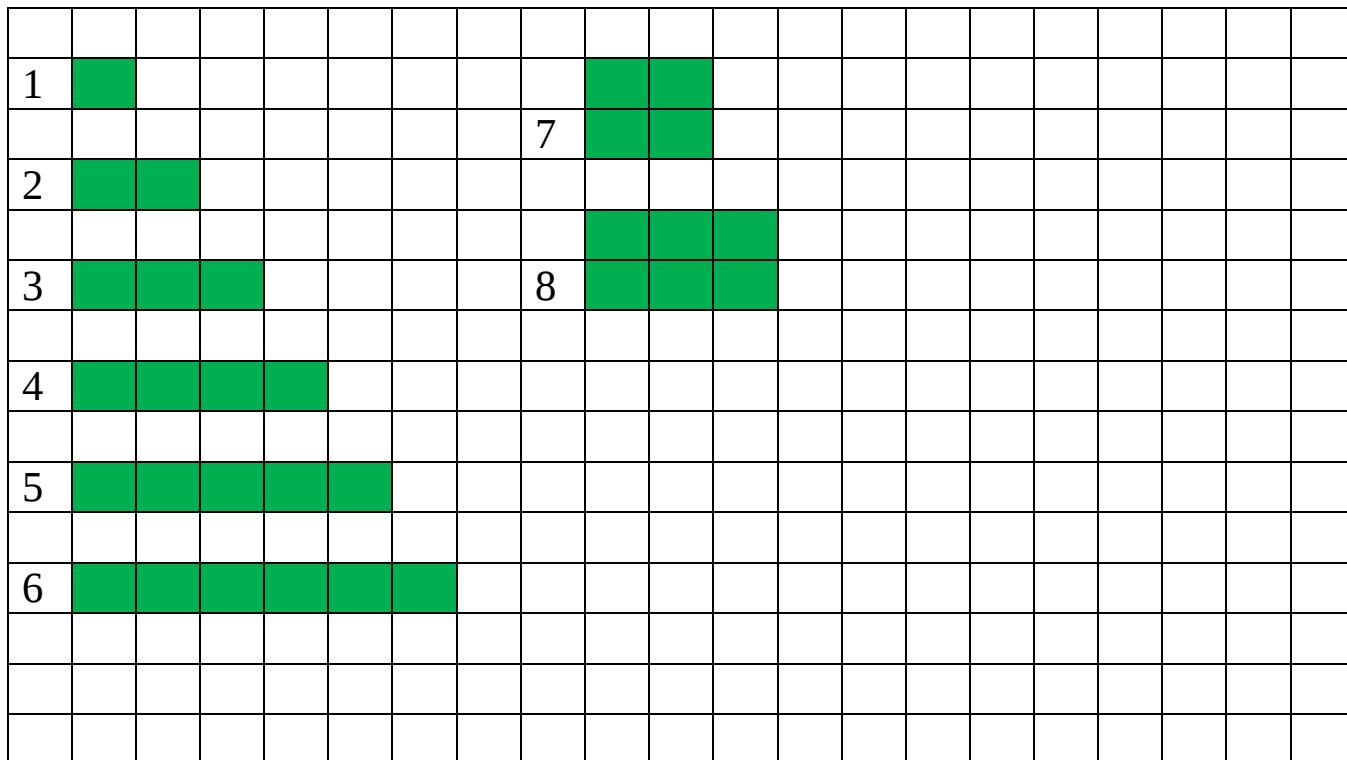
А) Нет, минимально может остаться 1 литр. Б) возможный порядок «поедания»

В) быстрее, чем за 3 присеста нельзя! Максимально можно съесть вначале $4+4=8$ литров, затем $2+2=4$ литра и, наконец, $1+1=2$ литра. Итого, за три присеста будет съедено $8+4+2=14$ литров.

Ответ: _____

№ 10 (8 баллов)

а) Будем рисовать на клетчатой бумаге прямоугольники. Какое наибольшее число различных прямоугольников, состоящих не более чем из 6 клеток вы сможете нарисовать? (Прямоугольники, которые можно получить друг из друга с помощью поворота считаются один раз). В ответе укажите количество и нарисуйте все эти прямоугольники.

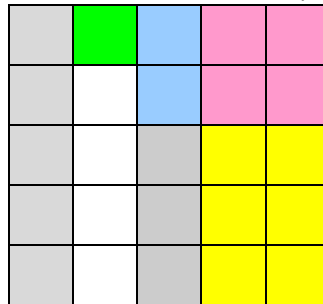


Помните, что квадрат тоже является прямоугольником!

б) Сможете ли вы составить из таких прямоугольников квадрат 5×5 , так чтобы все прямоугольники были различны. Если да, то сделайте соответствующий рисунок, если нет, то объясните. Сколько прямоугольников вам для этого понадобилось?

Ответ: а) **восемь** (по существу 7 из них изображены в ответе на пункт б), плюс еще прямоугольник 1×6 , который в квадрат 5×5 не поместится (смотри рисунок выше!)

б) Один из вариантов, как можно составить квадрат, см. на рис.



Комментарий к решению. Прямоугольник – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны равны и все углы прямые. Квадратом называется четырёхугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые. Т.е. квадрат является частным случаем прямоугольника. Любой квадрат является прямоугольником, но не каждый прямоугольник – квадрат.