Межрегиональная многопрофильная олимпиада 2021

Профиль «Математика». Тренировочный тур

8-9 класс

1. Незнайка составляет всевозможные шестизначные числа, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (каждую цифру – по одному разу). Помогите ему определить, сколько построенных чисел делится на 11.
2. Упростите выражение (ответ должен быть целым числом):
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2^2}\cdot\frac{17}{2^4}\cdot\frac{257}{2^8}\cdot\ldots\cdot\frac{2^{2^{2020}}+1}{2^{2^{2020}}}+\frac{2}{2^{2^{2021}}}.$$
3. В магазине проводится акция, в несколько ваз насыпаны конфеты и каждый посетитель магазина должен попробовать конфеты ровно из двух ваз. В конце дня оказалось, что для любых двух ваз нашелся ровно один посетитель, который попробовал конфеты из обеих ваз и из каждой вазы попробовали конфеты ровно девять посетителей. Сколько посетителей было в этот день в магазине?
4. Гномы решили ограбить дракона, в пещере которого лежат слитки золота общим весом 390 кг. Известно, что в пещере нет слитков тяжелее 19 кг. При этом каждый гном может поднять вес 57 кг, но не сможет поднять больше. Какое наименьшее количество гномов необходимо, чтобы они гарантированно смогли унести все золото из пещеры за один раз?
5. Серединные перпендикуляры остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая AO пересекает сторону BC в точке K. Найдите угол C (в градусах), если известно, что $BK=OK$ и $BC=3OK$.
6. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, таких, что (в ответ запишите сумму всевозможных x, y и z)
$$24xyz + 18xy + 36yz - 8xz - 12z - 6x + 27y = 625.$$

Решения

1. Незнайка составляет всевозможные шестизначные числа, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (каждую цифру – по одному разу). Помогите ему определить, сколько построенных чисел делится на 11.

   Ответ: 0.

   Решение. Пусть задуманное Незнайкой число имеет вид $\overline{abcdef}$. Применяя признак делимости на 11, получим, что выражение $S = a - b + c - d + e - f$ делится на 11. Выясним, какие значения может принимать S. Т.к. (6+5+4) – (3+2+1) = 9 < 11 (т.е. сумма трех наибольших из используемых цифр больше трех наименьших на 9), поэтому S<11 и аналогично S>-11. Следовательно, S=0, т.к. это единственное число кратное 11 в промежутке (-11;11). Однако отметим, что число 6+5+4+3+2+1 нечетное, поэтому результат любой расстановки плюсов и минусов между цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 тоже нечетен, и никак не равен нулю. Следовательно, среди построенных чисел нет кратных 11.

2. Упростите выражение (ответ должен быть целым числом):

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2^2} \cdot \frac{17}{2^4} \cdot \frac{257}{2^8} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{2^{2020}}+1}{2^{2^{2020}}} + \frac{2}{2^{2^{2021}}}.$$

   Ответ: 2.

   Решение.

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2^2} \cdot \frac{17}{2^4} \cdot \frac{257}{2^8} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{2^{2020}}+1}{2^{2^{2020}}} + \frac{2}{2^{2^{2021}}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2^4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right) + \frac{2}{2^{2^{2021}}} =$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2^4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right) + \frac{2}{2^{2^{2021}}} =$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{2^4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right) + \frac{2}{2^{2^{2021}}} =$$

$$= 2 \cdot \left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right) + \frac{2}{2^{2^{2021}}} = \cdots$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^{2020}}}\right) + \frac{2}{2^{2^{2021}}} =$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2^{2^{2021}}}\right) + \frac{2}{2^{2^{2021}}} = 2.$$

3. В магазине проводится акция, в несколько ваз насыпаны конфеты и каждый посетитель магазина должен попробовать конфеты ровно из двух ваз. В конце дня оказалось, что для любых двух ваз нашелся ровно один посетитель, который попробовал конфеты из обеих ваз и из каждой вазы попробовали конфеты ровно девять посетителей. Сколько посетителей было в этот день в магазине?

   Ответ: 45.

   Решение. Построим граф, в котором вершинами будут вазы, а ребрами посетители. Это возможно сделать, так как каждый посетитель магазина должен попробовать конфеты ровно из двух ваз. Кроме того, фраза «для любых двух ваз нашелся ровно один посетитель, который попробовал конфеты из обеих ваз» означает, что полученный граф является полным. Тогда, так как из каждой вазы попробовали конфеты ровно девять посетителей, получаем, что ваз было 10. Количество ребер у полного графа на 10 вершинах равно 45. Это и будет количеством посетителей в этот день.

4. Гномы решили ограбить дракона, в пещере которого лежат слитки золота общим весом 390 кг. Известно, что в пещере нет слитков тяжелее 19 кг. При этом каждый гном может поднять вес 57 кг, но не сможет поднять больше. Какое наименьшее количество гномов необходимо, чтобы они гарантированно смогли унести все золото из пещеры за один раз?

   Ответ: 9.

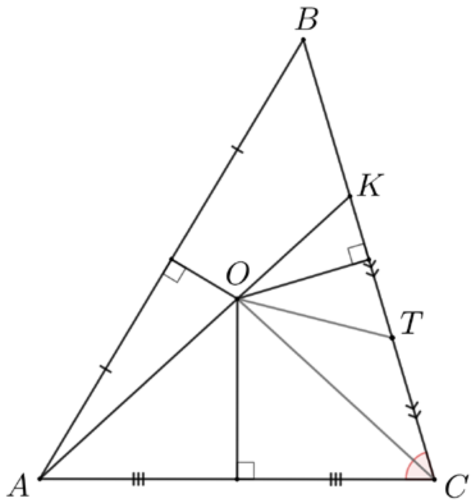
   Решение. Покажем, что 8 гномов не справятся. Пусть все слитки весят по 15 кг. Тогда слитков ровно 26. Один гном в этом случае может поднять не более трех слитков, то есть 8 гномов унесут не более 24 слитков, а значит не все золото. Покажем, как могут справиться 9 гномов. Для первых 6 гномов алгоритм действий одинаковый. Они будут брать по одному слитку, пока могут их поднять. Как только у них окажется больше 57 кг, они перестают брать слитки. Получаем, что эти 6 гномов взяли более 57 кг каждый и последний слиток у каждого из них лежит рядом с ним, а остальные слитки он держит на руках. Таким образом, еще золота в пещере осталось не более $390 - 6\cdot 57 = 48$ кг. Его берет седьмой гном. Оставшиеся два гнома берут по три слитка из шести, которые взяли, но не смогли поднять 6 первых гномов. Три слитка по весу не превышают 57 кг, поэтому такое возможно.

5. Серединные перпендикуляры остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*. Прямая *AO* пересекает сторону *BC* в точке *K*. Найдите угол *C* (в градусах), если известно, что $BK=OK$ и $BC=3OK$.

   Ответ: 75º.

   Решение. Пусть *T* – середина отрезка *CK*, а M – середина *BC*. Из условия задачи следует, что $OK=BK=KT=TC$. Далее $KM=BM–BK=CM–CT=TM$, т.е. *OM* – медиана и высота в треугольнике *OKT*, т.е. $OT=OK=KT$, что означает, что данный треугольник равносторонний и все его углы равны по 60°. Далее, $\angle OTC = 120°$ и $\angle TOC = TCO = 30°$, откуда $\angle COK = 90°$.

   Треугольник *AOC* прямоугольный равнобедренный, поэтому $\angle ACO = 45°$, а искомый $\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB = 75°$.



6. Найдите все тройки целых чисел $(x;y;z)$, таких, что (в ответ запишите сумму всевозможных x, y и z)

$$24xyz + 18xy + 36yz – 8xz – 12z – 6x + 27y = 625.$$

   Ответ: -276.

   Решение. Вычтем 9 из обеих частей уравнения и разложим левую часть на множители с помощью группировки

$$(2x+3)(3y-1)(4z+3)=616.$$

Отметим, что 616=7·8·11 и из трех полученных множителей левой части (2*x*+3) и (4*z*+3) являются нечетными, поэтому 3*y*-1 делится на 8. Рассмотрим, какие значения может принимать множитель 3*y*-1:

3*y*-1	***y***
8	3
-8	не целое
56	19
-56	не целое
88	не целое
-88	-29
616	не целое
-616	-205

1. *y*=-205, тогда либо $\begin{cases} 4z+3=1, \\ 2x+3=-1, \end{cases}$ либо $\begin{cases} 4z+3=-1, \\ 2x+3=1. \end{cases}$ Из второй системы находим решение (-1,-205,-1).

2. *y*= -29. Тогда

2*x*+3	**4*z*+3**	***x***	***z***
-1	7	-2	1
1	-7		не целое
7	-1	2	-1
-7	1		не целое

Решения: (-2;-29;1) и (2;-29;-1).

3. *y*=19. Тогда

2*x*+3	**4*z*+3**	***x***	***z***
-1	-11		не целое
-11	-1	-7	-1
1	11	-1	2
11	1		не целое

Решения: (-7;19;-1) и (-1;19;2).

4. y=3. Тогда

2*x*+3	**4*z*+3**	***x***	***z***
7	11	2	2
11	7	4	1
1	77		не целое
77	1		не целое
-7	-11		не целое
-11	-7		не целое
-1	-77	-2	-20
-77	-1	-40	-1

Решения: (2;3;2), (4;3;1), (-2;3;-20) и (-40;3;-1).

Сумма *x*, *y* и *z* во всех тройках равна -276.