1. Сейф Братьев Пилотов

Братьям Пилотам требуется открыть секретный сейф, замок которого представляет собой таблицу переключателей $m \times n$, каждый из которых может принимать значение “включено” и ”выключено”. Верное положение всех переключателей, т.е. то, при котором сейф открывается, единственно. За один ход братья Пилоты могут изменить положение одного переключателя, при этом, если он находится на пересечении строки i и столбца j, то при этом изменят своё состояние все остальные переключатели этой строки и этого столбца. Назовём *нулевой* таблицей таблицу, состоящую только из переключателей в положении “выкл”.

1. При каких m, n любую таблицу $m \times n$ можно получить путём выше описанных операций из нулевой таблицы?

2. Определите для различных m, n сколько операций необходимо проделать, чтобы поменять значения всех переключателей сейфа на противоположные?

3. Рассмотрите вопрос о минимальности количества ходов, необходимых для открытия сейфа.

В качестве обобщения рассмотрите другие операции, например изменение положений переключателей в квадрате 3х3, с центром в выбранной клетке, с угловой выбранной клеткой и т.д.

2. “Мышеловка”

Сыграем в игру. Пусть числа 1,2,..., n записаны на картах, по одному числу на карте. После перемешивания колоды начинаем снимать карты по одной сверху, отсчитывая их (заметим, что колода представляет собой перестановку). Если число на карте не равно её порядку при счёте, мы кладём карту вниз колоды и продолжаем считать. Если порядок при счёте совпадает с числом на карте, то откладываем карту в сторону и начинаем отсчёт заново с 1. Игра выиграна, если все карты отложены, но проиграна, если счёт перешёл за n.

1. Для каждого n найти все выигрышные перестановки 1,2,... , n.
2. Для каждого n найти число перестановок, при игре в которыми откладывается точно i карт, 1 < i < n.

Теперь рассмотрим выигрышные перестановки. После того, как все карты отложены, они образуют новую перестановку. Любую перестановку, получаемую таким путём, назовём восстанавливаемой.

3. Опишите восстанавливаемы перестановки.

Например, 4213 - выигрышная перестановка, из которой “восстанавливается” 2134; а из неё в свою очередь – 3214, которая не является выигрышной.

4. Найдите для данного n самую длинную последовательность восстанавливаемых перестановок.
5. Существуют ли последовательности произвольной длины? Существуют ли другие циклы, кроме 1 -> 1 -> 1 -> 1 и 12 -> 12 -> 12 -> 12 ... ?

“Модульная Мышеловка”. Мы можем играть в “Мышеловку”, но вместо счёта n, n + 1, ... , мы можем начинать заново, ... , n, 1, 2, ... Т.о. каждая последовательность перестановок либо образует цикл, либо заканчивается.

6. Существуют ли циклы длины k при каждом k? Какое наименьшее n порождает цикл длины k?

3. Игры на координатной плоскости

Двое играют в следующую игру. Первый игрок внутри данного на плоскости круга единичного радиуса размещает другую фигуру так, чтобы она содержала центр круга. Второй игрок за один ход проводит прямую и узнаёт у первого игрока, пересекает она размещённую внутри круга фигуру или нет.

1. Пусть первый игрок внутри круга разместил другой круг. Найдите или оцените минимальное количество ходов, необходимое второму игроку, чтобы угадать радиус размещённого круга с точностью до

а) $\frac{1}{3}$;

б) $\frac{1}{4}$;

в) $\frac{1}{10}$;

г) $\frac{1}{x}$ хотя бы для некоторых x.

2. Пусть первый игрок разместил выпуклый многоугольник. Найдите или оцените минимальное количество ходов, необходимое второму игроку, чтобы угадать периметр размещённого многоугольника с точностью до

а) $\frac{1}{3}$;

б) $\frac{1}{10}$;

в) $\frac{1}{300}$;

г) $\frac{1}{x}$ хотя бы для некоторых x.

Рассмотрите данный пункт задачи по крайней мере для некоторых выпуклых многоугольников (правильных, вписанных и т.д.).

3. Рассмотрите пункт 2 задачи для длины границы произвольной выпуклой фигуры.

4. Рассмотрите пункты 2,3 задачи изменив длину границы на другой параметр (площадь, длина наибольшей хорды и т.д.)

1. Переливание крови

1. Группа из 40 человек отправилась в экскурсионную поездку на автобусе. На одном из крутых поворотов автобус, к несчастью, перевернулся. Через некоторое время на место происшествия приехали врачи. Медики заметили, что **каждый второй** человек в результате аварии потерял так много крови, что пережить поездку в ближайшую больницу не сможет. И чтобы спасти раненых, нужно немедленно сделать переливание.

Оставшиеся пассажиры могут являться донорами пострадавшим. Т.к. процедуру необходимо производить срочно, то будем считать, что все пассажиры здоровы, и кровь любого пригодна для переливания. Но чтобы не навредить уцелевшим, введём следующее правило: каждый может быть донором только для **одного** человека. Поэтому остаётся лишь учесть группу крови каждого из них.

Напомним, что если группы крови обозначить как O, A, B, AB, то существуют следующие правила переливания крови:

I. $X \to X, \forall X \in \{O, A, B, AB\}$

II. $O \to X, \forall X \in \{O, A, B, AB\}$

III. $X \to AB, \forall X \in \{O, A, B, AB\}$

После быстрого опроса врачам стало известно, какая группа крови у каждого из членов экскурсии. Оказалось, что носителей каждой из 4-ёх групп **поровну**.

Какова вероятность p того, что возможно оказать помощь каждому из пострадавших, т.е. что для каждого раненого найдётся подходящий донор?

2. Рассмотрим предыдущую задачу с произвольным количеством пассажиров N. Установите зависимость вероятности p от N.

3. В задаче **1** сказано, что пострадала половина группы. Рассмотрите случаи, когда в переливании нуждаются 25%, 75%, 10% пассажиров. Попробуйте оценить или найти p в этом случае.

Исследуйте случай произвольной доли пострадавших пассажиров, т.е. функцию $p(x)$, $0 < x < 1$.

4. Найдите или оцените функцию $p(N, x)$.

5. Представьте, что данное происшествие произошло на другой планете, где живут существа, похожие на людей, но их кровь бывает **8-ми групп**: $O, A, B, C, AB, AC, BC, ABC$. Отождествим каждую группу крови со словом из букв алфавита $\{A, B, C, O\}$, O – нулевой (пустой) символ. Теперь укажем аналогичные описанным выше правила переливания:

I. $O \to X, \forall X$

II. $X \to Y$, если каждая из букв непустого слова X содержится в слове Y.

Назовём количество ненулевых символов в соответствующем системе групп крови алфавите **порядком системы групп крови**, обозначим m. В описанной выше системе $m = 3$.

Имея алфавит из m ненулевых символов и O, несложно составить систему групп крови. Одной из групп будет O. Также рассмотрим всевозможные слова из непустых символов, не содержащие 2 одинаковых букв. Тогда 2 словам соответствуют различные группы крови, если одно из них не получается перестановкой букв другого (например, ABC и ACD; а ABC и CAB обозначают одну и ту же группу).

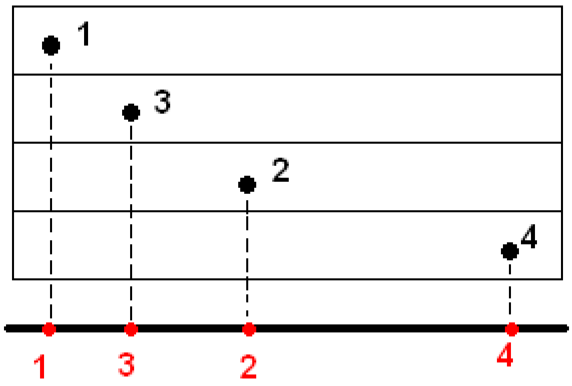
а) Найдите количество групп крови, если порядок равен m.

б) Исследуйте зависимость вероятности из первого пункта от количеств групп крови, от порядка m.

в) Найдите или оцените функцию $p(N, x, m)$.

6. Предложите свои обобщения и направления в исследовании.

2. Челночный бег



По 4 прямым дорожкам бегают спортсмены, находящиеся в начальный момент времени на линии старта. Каждый из них пробегает дистанцию от одного конца до другого, меняет направление на противоположное и т.д. На майке каждого из них – номер от 1 до 4 соответственно.

Скорости спортсменов – различные положительные действительные постоянные.

Один из болельщиков, наблюдая за соревнованиями, заметил, что можно бегунов считать точками и спроецировать их в некоторый момент времени t на прямую, параллельную дорожкам. Тогда, пронумеровав проекции соответственно номерам спортсменов, мы получим перестановку чисел 1, 2, 3, 4.

В момент времени t_1 порядок номеров проекций изменится, и мы получим новую перестановку чисел 1, 2, 3, 4. Таким же образом мы можем получить ещё одну перестановку и т.д.

1. Можно ли спортсменам задать такие начальные скорости, чтобы рано или поздно могли быть получены все перестановки?

2. Можно ли скорости задать так, чтобы ни одна из перестановок не повторилась до того, как будут получены все перестановки?

3. Рассмотрите задачу при условии того, что начальное положение и направление бега каждого из спортсменов выбирается произвольно.

4. Существуют ли начальное положение и скорости спортсменов такие, что перестановки будут получаться в лексикографическом порядке?

5. Рассмотрите предыдущие вопросы для произвольного количества спортсменов.

6. Предложите свои направления в исследовании (например непостоянные скорости спортсменов).