RESEARCH PROBLEMS FOR THE NATIONAL SUMMER SCHOOL 2011

DAVID ZMIAIKOU

Содержание

1. Прогулки на окружности

Рассмотрим единичную окружность S^1 и обозначим через $d(x,y)$ длину наименьшей дуги, соединящей точки $x, y \in S^1$. Докажите, что для любых $2n$ точек на окружности $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ существует индекс $1 \le i \le n$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{n} d(x_i, x_k) \le \sum_{k=1}^{n} d(x_i, y_k).$$

Исследуйте задачу для других функций $d : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^+$.

2. Разбиения латинских квадратов

Латинским квадратом порядка n называется таблица $n \times n$, в клетки которой записано n различных символов таким образом, что каждый символ встречается ровно один раз в любой строке и любом столбце. *Латинским сеткой размера* k данной таблицы назовем множество из k строк и k столбцов (не обязательно смежных) таких, что k^2 клеток на их пересечении формируют латинский квадрат.

a) Докажите, что латинская сетка латинского квадрата порядка n либо совпадает с квадратом, либо имеет размер, не превосходящий $n/2$.
b) Существует ли латинский квадрат, который разбивается на латинские сетки различных размеров (т. е. представим в виде объединения латинских сеток различных размеров так, что каждая строка и каждый столбец квадрата входит ровно в одну сетку)?

Date: 13 июля 2011 г.

3. Крокус

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ остатков по модулю простого числа p. Подмножество $A \subseteq \mathbb{Z}_p$ назовем *крокусом*, если $x + y \notin A$ для любых $x, y \in A$.

a) Докажите, что если для мощности $n = |A|$ выполняется неравенство $n > 0.33p$, то существует целое число k такое, что $A \subseteq \{k \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}_p\,,\ n \leq z \leq p - n\}$.
b) Попытайтесь уменьшить константу 0.33.
c) На какое минимальное число можно заменить константу 0.33, чтобы утверждение пункта a) осталось верным?

4. Пицца

Алиса и Боб купили пиццу округлой формы. Боб разрезал пиццу на несколько не обязательно равных частей, с вершиной в середине пиццы. Затем Алиса и Боб стали по очереди есть пиццу так, чтобы всякий раз забираемая часть пиццы (кроме первой) граничила с уже съеденной. Докажите, что если Алиса начинает трапезу, то ей удастся съесть минимум 4/9 пиццы.

5. Перколяции

Рассмотрим решетку $\mathbb{Z}^2$ точек на плоскости с целыми координатами. Расстояние между двумя точками $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$ решетки определяется следующей формулой

$$d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

В точках A_0 и B_0 решетки стоят два робота, которые по очереди помечают целые точки красным и синим цветами соответственно. На нулевом этапе роботы помечают точки, на которых стоят. На каждом следующем этапе сначала первый робот помечает красным цветом еще не закрашенные точки на расстоянии 1 от всех красных точек, а затем второй робот помечает синим цветом еще не закрашенные точки на расстоянии не более 2 от всех синих точек. Понятно, что на некотором этапе первый робот перестанет больше не сможет помечать точки красным цветом. Обозначим через N номер этапа, на котором первый робот в последний раз закрасит точку.

a) Найдите формулу числа N в зависимости от координат точек A_0 и B_0.
b) Сколько вершин будет у выпуклой оболочки красных точек после этапа N?

6. Необычные перестановки

Пусть k и n два натуральных числа, удовлетворяющих неравенствам $n/2 \leq k < n$. Перестановку $a_0, a_1, \ldots, a_n$ чисел $0, 1, \ldots, n$ назовем *необычной*, если в наборе

$$|a_1 - a_0|,\ |a_2 - a_1|,\ \ldots,\ |a_n - a_{n-1}|$$

имеется каждое число от 1 до $2k - n$ в одном экземпляре и каждое число от $2k - n + 1$ до k в двух экземплярах. Правда ли, что для любого $n > 1$ существует необычная перестановка?

7. Задача о соседях

Диаметром многоугольника (необязательно выпуклого) называется наибольшее расстояние между двумя его точками.

a) Квадрат со стороной 1 разбит на несколько выпуклых многоугольников. Предположим, что диаметр каждого многоугольника не превосходит $\frac{1}{30}$. Докажите, что найдется многоугольник P, у которого имеется не менее шести *соседей*, то есть многоугольников, касающихся P по крайней мере в одной точке.

b) Задача пункта a) для общего случая, когда многоугольники разбиения необязательно выпуклы.

c) Заменим в условии пункта a) константу $\frac{1}{30}$ на положительное действительное число $\epsilon > 0$. Найдите наибольшее натуральное число $N(\epsilon)$ такое, что при любом разбиение квадрата со стороной 1 на выпуклые многоугольники диаметра $\leq \epsilon$, хотя бы у одного из многоугольников будет не менее $N(\epsilon)$ соседей.

d) Задача пункта c) для случая, когда многоугольники разбиения необязательно выпуклы.

8. Перестановки и вероятность

Пусть n – натуральное число. Обозначим через S_n и A_n соответственно симметрическую и знакопеременную группы перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$.

a) Обозначим через p_n вероятность того, что случайно выбранная пара (s, t) перестановок из S_n порождает S_n или A_n. Докажите, что p_n стремится к 1, когда n стремится к бесконечности.

b) Обозначим через $p_n(2)$ вероятность того, что случайно выбранная пара (s, t) перестановок из S_n, такая что коммутатор $[s, t] = sts^{-1}t^{-1}$ является 3-циклом, порождает S_n или A_n. Верно ли, что $p_n(2)$ стремится к 1, когда n стремится к бесконечности?

9. English version of some problems

14. A problem on neighbors. The *diameter* of a polygon (not necessarily convex) is the greatest distance between any two of its points.

a) A unit square is divided into convex polygons. Suppose that the diameter of each of these polygons does not exceed $\frac{1}{30}$. Prove that there is a polygon P with six or more *neighbors*, that is, polygons touching P in at least one point.

b) The same problem in the general case that the polygons are not necessarily convex.

c) Replace in a) the constant $\frac{1}{30}$ by a positive real number $\epsilon > 0$. Find the greatest positive integer $N(\epsilon)$ such that, for any partition of the unit square into convex polygons of diameter $\leq \epsilon$, at least one of these polygons would have $N(\epsilon)$ or more neighbors.

d) The problem c) in the case that the polygons are not necessarily convex.

15. Permutations and probability. For a positive integer n, denote by S_n and A_n respectively the symmetric and the alternating groups of permutations of the numbers $1, 2, \ldots, n$.

a) Let p_n be the probability that a random pair (s, t) of permutations from S_n generate either S_n or A_n. Show that p_n tends to 1 as n tends to infinity.

b) Let $p_n(2)$ be the probability that a random pair (s, t) of permutations from S_n, such that the commutator $[s, t] = sts^{-1}t^{-1}$ is a 3-cycle, generate S_n or A_n. Is it true that $p_n(2)$ tends to 1 as n tends to infinity?

Laboratory of Mathematics, University Paris-Sud 11, 91400 Orsay, FRANCE
E-mail address: `david.zmiaikou@gmail.com`