ПРОБЛЕМНЫЙ СЕМИНАР – Темы для научных исследований по МАТЕМАТИКЕ для научного семинара старшеклассников на 2012-2013 год

Задачи Задворного Б.В.

1. Разрезания на прямоугольники различных фигур (*для 8-9 класса*)

А) Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 1×4?

Б) Какое наибольшее количество полосок а) 1×5; б) 1×6; в) 1×7 можно вырезать из листа клетчатой бумаги размером 27×34? (Резать можно только по линиям клеток.) Будем называть в дальнейшем такие полоски доминошками соответствующих размеров.

В) Можно ли ввести отношение эквивалентности для разрезания различных досок, классы эквивалентности, элементарные представители классов.

Г) Разрезания на доминошки «сложных» фигур (объединений прямоугольников и проч.).

Д) разрезания на «мультидоминошки».

2. Разрезания (*для 7-8 класса)*

1. Сколькими способами можно вырезать из квадрата 9×9 квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
2. Для каких натуральных чисел n из квадрата $n\times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
3. Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m\times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
4. Рассмотрите задачу в следующих двух направлениях:

   а) Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m\times n$ можно вырезать квадрат $p\times p$ (p – некоторое натуральное число) так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?

   б) Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m\times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники $s\times t$, s, t – некоторые натуральные числа?

3. Переливания – 2

1) Исходная идея взята в задаче № 33 из сб. «Всеросс. олим. школьн. по мат. 1993-2006»: «Имеется семь одинаковых стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй на треть, третий на четверть, четвертый на одну пятую, пятый на одну восьмую, шестой – на одну девятую, и седьмой на одну десятую. Разрешается переливать воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока тот не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться наполненным:

а) на одну двенадцатую; б) на одну шестую»;

2) **(моя задача, Б.З.)** найти все множество значений m/n такие, что можно некоторой последовательностью переливаний получить стакан, заполненный на m/n ($0 < m/n < 1$, $m, n \in N$). Для решения этой задачи нужно будет подробно изучить различные комбинации переливаний, по существу понять что мы можем добавить в некоторый стакан (или сосуд), что из него отнять (своеобразное «сложение» и «вычитание»), как все это зависит от исходной комбинации **5.**

4. Необычные признаки делимости (для 7-8 класса)

1. Пусть $m = \underline{abc}$ –трехзначное натурально число. Докажите,что если $2c = 3a + b$,то m делится на 7.
2. Пусть $m = \underline{abcd}$ – четырехзначное натурально число. Докажите, что если $3(a - d) = 2c - b$, то m делится на 7.
3. Придумайте другие подобные признаки делимости на различные числа. Установите взаимосвязи

5.*** Цикл нерешенных задач теории чисел (по мотивам П.Эрдеша)

1. Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_n \le 2n$ - конечная последовательность положительных целых чисел. Докажите, что $\min[a_i, a_j] \le 6([n/2]+1)$, где под знаком минимума стоит НОК двух чисел. Минимум берется по всевозможным парам, выбранным из последовательности. Можно ли улучшить эту оценку. *Источник задачи:* № 138 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала American Mathematical Monthly, далее – «AMM»)».

2. Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_n < 2n$ - конечная последовательность положительных целых чисел. Докажите, что $\max(a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c$, где под знаком максимума стоит НОД двух чисел, c – констатнта. Максимум берется по всевозможным парам, выбранным из последовательности. Можно ли улучшить эту оценку. *Источник задачи:* **нерешенный** № 139 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

3. Попробуйте изучить другие неравенства подобного вида.

4. Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_n \le 2n$ - натуральные числа такие, что НОК любых двух из них больше $2n$. Докажите, что $a_1 > [2n/3]$. *Источник задачи:* № 364 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

5. Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_n \le 2n$ - положительные целые числа такие, что ни одно из них не делится ни на какое другое из этой последовательности. Докажите, что $a_1 \ge 2^k$, где k определяется неравенствами $3^k < 2n < 3^{k+1}$. Эта оценка для a_1 неулучшаема. *Источник задачи:* № 134 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

6. . Исследуйте другие свойства таких последовательностей.

7. **(П.Эрдеш)** Пусть f(n) – мощность наибольшего множества чисел из отрезка [1, n], не содержащего членов, делящих два других. Насколько большим может быть f(n) (Эрдеш)?
С другой стороны, можно задать такой вопрос: каково наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих n, без чисел, являющихся делителями двух других? Более общо: Эрдеш ставит вопрос о наибольшем количестве чисел, не делящимися k другими. В частности, при $k = 1$ ответ – [n/2].

8. Плотность последовательности натуральных чисел с НОК каждой пары меньше, чем *x (Эрдеш).*
Пусть A = {a_i} – возможно неограниченная, строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Количество элементов этой последовательности, не превосходящих x, обозначим A(x). Под плотностью последовательности назовем предел A(x)/x, если он существует.

Каково максимальное значение A(x), если НОК(a_i, a_j) каждой пары не превосходит x. Оцените A(x).

Сравните эту задачу с предыдущими.

6. Задача о неплотной расстановке пентамино (задача с Международного турнира юных математиков 2009 года)

Условие задачи:

а) На клетчатой доске 6×6 вдоль линий клеток расставляются фигурки вида буквы Т (см. рис.) так, чтобы они не накладывались друг на друга (касаться углами или сторонами фигурки могут, а также их можно поворачивать на 90°, 180° или 270°). Расстановку фигурок назовем плохой, если на доску нельзя поставить никакой новой фигурки без нарушения указанных условий. Каким наименьшим количеством фигурок можно добиться плохой их расстановки?

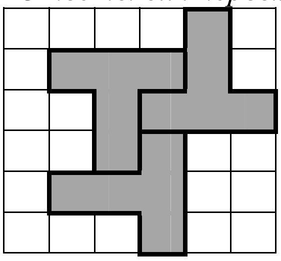
б) Каким наименьшим количеством фигурок вы сможете добиться плохой их расстановки на доске 7×7.

в) Исследуйте общую задачу о максимально неплотной расстановке фигурок типа «пентамино» на прямоугольных досках $m \times n$ (оцените количественные характеристики таких упаковок, возможные методы и алгоритмы упаковок и т.п.).

г) Два игрока играют на доске $m \times n$ по следующим правилам: каждый из них по очереди выставляет, если возможно на доску пентамино. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его соперник? Исследуйте игру при различных занчениях m и n.

д) Предложите свои направления или обобщения в этой задачи и исследуйте их.

Ответы для первых двух пунктов: а) Тремя фигурами. б) Тремя фигурами.



Решение. а) см. рис.5. Меньше фигур не могут образовать плохой расстановки. Действительно, в квадрате 5×5 всегда можно расположить две фигуры, даже если одна из них расположена в самом центре квадрата (как на рис. 6). Если же мы добавим еще одну строчку и один столбец, то небольшим перебором можно убедиться, что всегда в квадрате 6×6 можно расположить три фигуры.

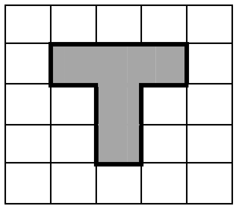


Рис. 5

Рис. 6

б) см. рис.7. Если бы здесь можно было бы обойтись двумя фигурами, то и в пункте а) можно было бы обойтись двумя фигурами.

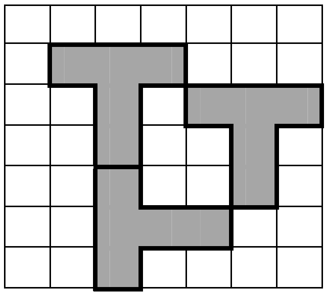


Рис.7

7. Домино и тримино (РТЮМ-2007 - № 4)

А) Рассмотрим полный набор косточек домино, в котором числа на половинках косточек (будем называть их *дольками*) могут принимать значения от 0 до n.

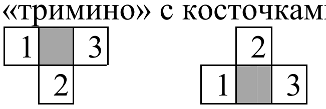
Будем выкладывать косточки домино в соответствии со следующими правилами. Начинать можно с любой косточки. Каждую следующую косточку необходимо выкладывать так, чтобы она продолжала уже выложенную цепочку (по принципу «торец в торец») и при этом число на прикладываемой дольке этой косточки было равно числу на соответствующей концевой дольке цепочки. Цепочки из косточек домино, полученные по этим правилам, будем называть *правильными разложениями*.

1) Сколько всего косточек домино в указанном наборе?
2) Какое наибольшее число косточек может быть выложено в соответствии с правилами (будем называть такие расположения косточек *максимальными правильными разложениями*)?
3) Попробуйте определить точно или оценить количество правильных разложений (хотя бы для некоторых отдельных значений n, n = 3, 4, 5, …).

Б) Рассмотрите те же вопросы для обобщенного домино, т.е. для домино, косточки которого состоят из трех (или более) долек и имеют вид прямоугольника 1×3 (1×4 и т.п., выкладывать косточки разрешается по описанным выше правилам).

В) Рассмотрим игру «тримино» – аналог игры домино, в которой косточки состоят из трех долек, на которых отмечены цифры от 0 до n, причем в отличие от домино, косточки разрешается прикладывать своим торцом не только к концу цепочки, но и к средней дольке любой из ранее выложенных косточек. Примечание. Здесь возможно рассмотрение двух случаев как двух разных игр: *прикладывание с одной стороны косточки* или *прикладывание с двух сторон косточки*.

Г) Попробуйте рассмотреть игру «тримино» с косточками вида:



(заметьте, что на рисунке изображены две различные косточки). При этом каждую новую косточку разрешается прикладывать любым своим концом к любому еще свободному концу цепочки.

Исследуйте вопросы аналогичные вопросам 1) – 3) в указанных играх и других по вашему усмотрению (при этом дайте точное определение вводимых вами условий или правил игры).

8. Цифровая структура чисел в арифметической прогрессии

1) Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии (т.е. содержащей бесконечное число членов) найдется член, в десятичной записи которого есть хотя бы одна цифра

2) Обозначим через L длину (количество членов) некоторой арифметической прогрессии. Для какого наибольшего значения L вы сможете построить пример арифметической прогрессии длины L, такой, что десятичная запись ни одного ее члена не содержит нулей? (Возможно, здесь вы укажете конкретный пример, или способ построения, или доказательство существования соответствующей прогрессии и т.п.)

3) Останутся ли справедливыми утверждения пп. 1) и 2), если вместо цифры 0 взять какую-либо другую цифру $к$ ($1 \le к \le 9$)?

Сформулируйте гипотезы, аналогичные полученным в пп. 1) и 2), и, по возможности, проверьте их истинность для такого случая: в десятичной записи членов арифметической прогрессии ищется не отдельная цифра, а вполне определенная комбинация последовательно расположенных цифр (например, в числе 5123648 есть комбинация «123»).

9. Корни специальных рациональных уравнений.

Известно, как определить рациональные корни уравнений вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$ с целыми (или рациональными) коэффициентами.

Попробуйте определить корни вида $a + в\sqrt{2}, a + в\sqrt{3}, \ldots, a + в\sqrt{n},$ где a, $в$ $\in$ $\mathbf{Q}$, таких уравнений (по крайней мере постройте алгоритмы определения таких корней). Может вы сможете определять корни более сложного вида (даже очень сложного вида – со многими вложенными корнями) и т.п. Следующий шаг в этой задаче – <u>нахождение корней разного вида для рациональных уравнений, коэффициенты которых (т.е. самих уравнений) сами имеют достаточно сложный вид</u> (например, $a + в\sqrt{2},$ где a, $в$ $\in$ $\mathbf{Q}$, и т.п.).

10. Задачи про суммы цифр различных чисел (отталкиваемся от известных).

Обозначим через $S(y)$ сумму цифр числа y.

А) Докажите, что существует бесконечно много номеров N, таких, что $S(2^N) > S(2^{N+1})$.

Б) Докажите, что $\to\infty$ при $n\to\infty$. Проверить, что это – предел или неограниченность последовательности!!! А что можно сказать про другие числа в степени n? Существуют ли числа, для которых подобная последовательность ограничена?

В) При каких K отношение суммы цифр N к сумме цифр $K \cdot N$ ограничено? А обратное отношение? Другие отношения?

11. Уравнения с биномиальными коэффициентами.

Известно, что 3003 = $C_{15}^{5} = C_{14}^{6}$ А) Решите в натуральных числах уравнение $C_{x+1}^{y} = C_{y+1}^{x}$. (AMM.65)

Б) Исследуйте уравнение вида $C_{x}^{y} = C_{z}^{t}$ в общем случае. Попробуйте разработать методы их решения. Найдите решения уравнений такого вида для указанных четырех переменных, удовлетворяющих каким-либо соотношениям.

12. «Незаконное» сокращение.

Доказать, что существуют лишь три правильные дроби со знаменателями меньшими 100, которые можно привести к несократимому виду, «незаконно» зачеркнув одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Одна из них – это дробь 26/65 = 2/5. Найдите остальные две дроби и докажите, что других дробей, обладающих тем же свойством не существует. *Источник задачи:* № 302 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «АММ»)».

Общая постановка: Попробуйте рассмотреть такие же вопросы для чисел со знаменателем меньшим 1000 и т.п. Интересно, можно ли получить общие рекомендации для решения подобных задач.

Задачи А.Рыжикова

1. (тематика - инварианты, группы). На острове живут хамелеоны трёх цветов: красного, зелёного и синего. Когда встречаются два хамелеона разных цветов, они оба меняют цвет на третий. Изначально на острове 15 красных, 16 зелёных и 17 синих хамелеонов. Могло ли их в некоторый момент стать по 16 каждого цвета?

Исследуйте, как может изменяться число хамелеонов разного цвета в зависимости от их первоначального количества.

А что, если хамелеонов некоторого цвета может быть отрицательное количество?

Обобщите задачу на случай n цветов: встречаются по-прежнему три хамелеона и меняют цвет на любой из оставшихся.

А что, если они меняют цвет на какой-то заданный (например, на следующий по порядку за цветом одного из тех двух хамелеонов)?

А что, если встречаются n - 1 хамелеонов и меняют цвет на оставшийся?

Предложите свои обобщения.

2. (тематика – теория графов). Асфальтоукладчик ездит по городу, имеющему вид квадрата 3 на 3 (4 на 4, n на n), разделённого улицами на единичные квадраты (каждый отрезок разбиения, соответственно, имеет длину 1). Найдите длину наименьшего замкнутого пути, проходящего по каждой улице, и сам этот путь.

Исследуйте задачу для "города", имеющего форму куба, разделённого на единичные кубики.

Найдите длину наименьшего незамкнутого пути, проходящего по каждой улице.

Исследуйте задачу для необязательно квадратных городов.

Задачи Лавриновича Л.И.

1. **Код, исправляющий ошибку.** Предположим, что требуется передать сообщение из n^2 нулей и единиц. Запишем его в виде квадратной таблицы $n \times n$. Допишем к каждой строке сумму ее элементов по модулю 2. Получится еще один столбец. Затем

аналогично поступим с каждым столбцом. Включая новый. Получим таблицу $n+1 \times n+1$.

а) Докажите, что если при передаче новой таблицы произойдет одна ошибка, то эту ошибку можно будет найти и исправить.

б) Какое наименьшее число ошибок должно произойти, чтобы об этом нельзя было узнать.

в) рассмотрите аналогичную задачу, если код может состоять из *k* символов.

г) Предположим одно и тоже сообщение передается несколько раз. Известно, что при каждой передачи происходит определенное число ошибок. Какое наименьшее число передач необходимо, для того, чтобы с гарантией восстановить код?

2. **Многоугольники в субцелочисленных решетках.** Известна задача о расположении правильных многоугольников в целочисленных решетках. Рассмотреть данную задачу для случая, когда все вершины многоугольников могут лежать в некоторой окрестности узлов. Рассмотреть данную задачу, для почти правильных многоугольников.

3. **Квадраты в различных системах счисления.** Для данного числа N, записанного в десятичной системе счисления, определить существует ли такая система счисления, в которой число, записанное теми же цифрами, что и N, будет полным квадратом. Определить условия, когда не существует такой системы счисления. Если она существует, то определить единственна ли она.

4. **Числа в различных системах счисления.** Существуют числа, которые в различных системах счисления записываются одинаковым набором цифр. Например $196_{10} = 169_{11}$. Попытайтесь найти еще такие числа и системы счисления. Получите условия их существования.

5. **Выборы1.** Выборы президента США не прямые, двухступенчатые. В первом туре избиратели каждого штата отдают свои голоса выборщикам, число которых равно числу членов палаты представителей и сената от данного штата. Избранным считается целиком список выборщиков, получивших большинство голосов. Избранным считается кандидат в президенты набравший абсолютное число голосов выборщиков. Какое наименьшее число голосов избирателей должен набрать кандидат, чтобы победить.

6. **Выборы2.** Существуют множество алгоритмов и формул для определения формирования избирательных округов и формирования представительских органов. Исследовать данные алгоритмы. Попытаться построить свои алгоритмы.

7. **Угадывание чисел.** Двое играют в игру: один задумывает некоторое число, второй называет *k* чисел из промежутка от 1 до *n*. Первый прибавляет к задуманному числу одно из них и говорит результат и т.д. Найти минимальное число ходов, за которое второй игрок сможет определить задуманное число. Та же задача, но первый игрок проводит другую операцию над числами (вычитает, умножает, делит, возводит в степень и т.д)

8. **Способы задания многоугольников.** Есть различные способы задать многоугольники на плоскости. (Системы линейных неравенста, уравнения с модулями, параметрические уравнения.) Найти взаимосвязь между этими формами.

9. **Фигуры наибольшей площади.** На координатной плоскости задать множество точек наибольшей площади, удовлетворяющее условию: для любых двух точек множества площадь треугольника с вершинами в начале координат и в этой точке не превосходит α .

10. **Разложение на простейшие дроби**. Рассматриваются дроби вида $\frac{1}{m}$. Можно ли представить произвольное число в виде суммы таких дробей с различными знаменателями. Рассмотреть ту же задачи для случая простых знаменателей.

11. **Крестики-нолики.** Двое играют в игру на бесконечном листе бумаги. За ход один ставит N крестиков в любом месте. Другой – M ноликов. Последующими ходами можно ставить крестики и нолики только в клетки с уже помеченными. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Исследовать выигрышные стратегии. (Квант 1971)

12. **Разложение многочленов на множители.**

    а) Найти различные между собой целые числа *a, b, c*, чтобы многочлен $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$ можно было разложить на множители с целыми коэффициентами.

    б) Определите при каких условиях многочлен $x(x-a)(x-b)(x-c)+d$ можно разложить на множители с целыми коэффициентами.

    в) Рассмотрите многочлены более высокого порядка.

13. Прямоугольники на координатной плоскости

На координатной плоскости заданы точки $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, b)$ $D(a, 0)$, являющиеся вершинами прямоугольника ($a>b>0$). Отрежем от прямоугольника с правой стороны квадрат наибольшей площади. Затем повернем плоскость против часовой стрелки на 90° и, если это возможно, опять отрежем справа квадрат наибольшей площади. Затем опять повернем плоскость против часовой стрелки на 90° и т.д. Данный процесс будет конечным, если после нескольких таких операций получится квадрат. В противном случае он бесконечный.

1. Определите условия конечности данного процесса в зависимости от значений *a*, *b*.
2. Определите условия, при которых операция отрезания квадрата будет осуществляться после каждого поворота.
3. Если процесс конечен, определите координаты вершин оставшегося квадрата.
4. Пусть *a*, *b* соотносятся в золотом сечении, т.е. $a:b=b:(a-b)$, найдите координаты точки, которая останется после бесконечного числа отрезания.
5. Если процесс бесконечный, определите координаты оставшейся точки.
6. Пусть заданы координаты четырех вершин квадрата, определить существует ли прямоугольник, из которого с помощью описанных выше операций можно получить данный квадрат. Если существует, найдите координаты вершин такого прямоугольника:

а) по крайней мере координаты одного такого прямоугольника;

б) попробуйте описать множество таких прямоугольников (описать множество их вершин (рекуррентно или каким-либо другим способом)).

7. Пусть дана точка на плоскости, определите существует ли прямоугольник, из которого с помощью бесконечного числа описанных выше операций можно получить данную точку. Если существует, найдите координаты его вершин.