ПРОБЛЕМНЫЙ СЕМИНАР – 2013

ОБНОВЛЕННЫЙ СПИСОК ЗАДАЧ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. **(для 6-7 класса).** Существует ли такое 2-значное (3-хзначное, 4-хзначное, …, m-значное) натуральное число, которое в 11 раз больше суммы своих цифр (в k раз больше своих цифр)? Найдите все (или как можно больше) таких чисел. (*Источник – математический фольклор*)

2. **(для 6-7 класса). А)** Существует ли такое 2-значное (3-хзначное, 4-хзначное, …, m-значное) натуральное число, которое увеличивается в 2 раза (в 3 раза, …, в k раз) при перестановке своей первой цифры в конец числа? Найдите все (или как можно больше) таких чисел. **Б)** Тот же вопрос, только переставляется не одна цифра, а две (три, …). (*Источник – математический фольклор*)

3. **Необычная игра в крестики-нолики на доске $m\times n$**. Правила игры остаются старыми, с той лишь разницей, что каждый игрок на своем ходу может поставить либо крестик, либо нолик по своему желанию. Побеждает тот, кто первый поставит ряд из трех (четырех, …) одинаковых фигур. Кто выиграет при правильной игре и почему? (*Источник для случая доски* 3×3 – *«Командно-личный турнир школьников «Математическое многоборье»,* 2008-2010, МЦНМО-2012)

4. **Уравнения, содержащие НОД и/или НОК**. Попробуйте разработать теорию уравнений, содержащих НОД и/или НОК двух (трех, …) чисел. Начинать можно, например, с таких уравнений.

А) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение НОК(n, k) = $2^3 3^5 7^7$? Попробуйте дать их общий вид (формулу или какое-нибудь другое описание).

Б) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение НОК(n, k) = P (Р – некоторое натуральное число)? Попробуйте дать их общий вид (формулу или какое-нибудь другое описание в зависимости от разложения P на простые множители).

В) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение НОК(n, k) · НОД(n, k) = P (Р – некоторое натуральное число)? Попробуйте дать их общий вид (формулу или какое-нибудь другое описание в зависимости от разложения P на простые множители).

Г) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение НОК(n, k) + НОД(n, k) = P (Р – некоторое натуральное число)? Попробуйте дать их общий вид (формулу или какое-нибудь другое описание в зависимости от разложения P на простые множители).

Д) Предложите свои уравнения и исследуйте их.

5. **(для 5-7 классов). Разрезания на различные подобные фигуры. А)** На какое число необязательно равных квадратов можно разрезать квадрат? Какое максимальное число различных квадратов может при этом может получиться?

Б) На какое число необязательно равных равносторонних треугольников можно разрезать равносторонний треугольник? Какое максимальное число различных равносторонних треугольников может при этом может получиться?

В) На какое число необязательно равных равнобедренных прямоугольных треугольников можно разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник? Какое максимальное число различных равнобедренных прямоугольных треугольников может при этом может получиться?

Г) Исследуйте такую же задачу для других треугольников (прямоугольников и т.д.).

6. **Шарики в коробочках – 2. А)** Сколько существует способов разложить n шариков в p коробочек так, чтобы ни одна коробка не осталась пустой?

Б) Сколько существует способов разложить n шариков в p коробочек (теперь коробочки могут оставаться пустыми)?

В) Сколько существует способов разложить n красных и m синих шариков в p коробочек так, чтобы в каждой коробочке было хотя бы по одному шарику каждого цвета?

Г) Сколько существует способов разложить n красных и m синих шариков в p коробочек так, чтобы в каждой коробочке было хотя бы по одному шарику красного цвета?

Д) Сколько существует способов разложить n красных и m синих шариков в p коробочек (теперь коробочки могут оставаться пустыми)?

Е) Исследуйте такие же задачи для шариков s цветов.

Ж) Предложите свои направления и обобщения этой задачи и исследуйте их.

7. Переливания – 2 (в пп. **А), Б), В)** можно попытаться решать и в младших классах, п. **Г)** не раньше 8-9 класса)

А) «Имеется семь одинаковых стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй на треть, третий на четверть, четвертый на одну пятую, пятый на одну восьмую, шестой – на одну девятую, и седьмой на одну десятую. Разрешается переливать воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока тот не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться наполненным:

а) на одну двенадцатую;

б) на одну шестую»; (Интересна идея – в задаче № 33 из сб. «Всеросс. олим. школьн. по мат. 1993-2006»:

в) вообще – какие численные значения объема можно получить?!

Б) (Общие постановки) Пусть имеется несколько одинаковых сосудов (три, четыре, пять, …) наполненных на p_1, p_2, p_3, …, жидкостью (все $p_i \in Q$, $0 < p_i < 1$). Найти все множество значений m/n такие, что можно некоторой последовательностью переливаний получить сосуд, заполненный на m/n ($0 < m/n < 1$, $m, n \in N$). Для решения этой задачи нужно будет подробно изучить различные комбинации переливаний, по существу понять что мы можем добавить в некоторый стакан (или сосуд), что из него отнять (своеобразное «сложение» и «вычитание»), как все это зависит от исходной комбинации стаканов (сосудов) и их заполненности.

В) А если $p_i \in Q(\sqrt{2})$. Изучить не только множество получаемых значений за k шагов (операций), но и возможность получения сколь угодно малых значений объемов жидкости в каком-либо сосуде (и скорость такого получения).

Г) Дав соответствующие определения системы сосудов, разрешенных операций, общей «*схемы*» переливаний в системе, изучить устойчивость этой схемы (системы) в зависимости от малых изменений начальных объемов.

8. Разрезания-2 (*для 6-8 класса, а может можно начинать и с 5-го?!*)

1. Сколькими способами можно вырезать из квадрата 9×9 квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
2. Для каких натуральных чисел n из квадрата $n\times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
3. Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m\times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
4. Рассмотрите задачу в следующих двух направлениях:

   а) Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m\times n$ можно вырезать квадрат $p\times p$ (p – некоторое натуральное число) так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?

   б) Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m\times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники $s\times t$, s, t – некоторые натуральные числа?
5. Предложите свои направления в этой задаче и исследуйте их.

9. Точные квадраты в арифметических прогрессиях (задача Васьковского М.М. из 0-го тура 13го РТЮМ (2011г.))

Пусть a, d – натуральные числа. Рассмотрим двустороннюю бесконечную арифметическую прогрессию: $\dots, a-2d, a-d, a, a+d, a+2d, \dots$ (1)

Точным квадратом называется число, являющееся квадратом целого числа.

1. Докажите, что если прогрессия (1) содержит хотя бы один точный квадрат, то она содержит бесконечно много точных квадратов.

2. Обозначим через $N(a,d)$ число членов прогрессии (1), которые являются точными квадратами и находятся среди чисел $1, 2, 3, \dots, d^2$. Найдите значение $N(a,d)$, если:

   2.1. $a=1,\ d=2011$;

   2.2. $a=1,\ d=2012$;

   2.3. $a=4,\ d=2012$;

   2.4. $a=b^2,\ d \in N$, где b – натуральное число.

3. Пусть a, d – натуральные взаимно простые числа.

   3.1. Докажите, что число $N(a,d)$ либо равно нулю, либо является точной степенью двойки, т.е. $N(a,d)=2^k$, где $k \in N \bigcup \{0\}$.

   3.2. Предположим, что $N(a,d)>0$. Найдите значение $N(a,d)$.

   3.3. Попытайтесь найти условия на параметры a, d, при которых $N(a,d)=0$.

10. Домино и тримино (РТЮМ-2007 - № 4)

А) Рассмотрим полный набор косточек домино, в котором числа на половинках косточек (будем называть их *дольками*) могут принимать значения от 0 до *n*.

Будем выкладывать косточки домино в соответствии со следующими правилами. Начинать можно с любой косточки. Каждую следующую косточку необходимо выкладывать так, чтобы она продолжала уже выложенную цепочку (по принципу «торец в торец») и при этом число на прикладываемой дольке этой косточки было равно числу на соответствующей концевой дольке цепочки. Цепочки из косточек домино, полученные по этим правилам, будем называть *правильными разложениями*.

1) Сколько всего косточек домино в указанном наборе?

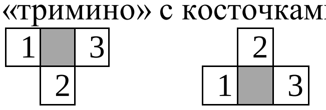
2) Какое наибольшее число косточек может быть выложено в соответствии с правилами (будем называть такие расположения косточек *максимальными правильными разложениями*)?

3) Попробуйте определить точно или оценить количество правильных разложений (хотя бы для некоторых отдельных значений *n*, *n* = 3, 4, 5, …).

Б) Рассмотрите те же вопросы для обобщенного домино, т.е. для домино, косточки которого состоят из трех (или более) долек и имеют вид прямоугольника 1×3 (1×4 и т.п., выкладывать косточки разрешается по описанным выше правилам).

В) Рассмотрим игру «тримино» – аналог игры домино, в которой косточки состоят из трех долек, на которых отмечены цифры от 0 до *n*, причем в отличие от домино, косточки разрешается прикладывать своим торцом не только к концу цепочки, но и к средней дольке любой из ранее выложенных косточек. Примечание. Здесь возможно рассмотрение двух случаев как двух разных игр: *прикладывание с одной стороны косточки* или *прикладывание с двух сторон косточки*.

Г) Попробуйте рассмотреть игру «тримино» с косточками вида:



(заметьте, что на рисунке изображены две различные косточки). При этом каждую новую косточку разрешается прикладывать любым своим концом к любому еще свободному концу цепочки.

Исследуйте вопросы аналогичные вопросам 1) – 3) в указанных играх и других по вашему усмотрению (при этом дайте точное определение вводимых вами условий или правил игры).

11. Цифровая структура чисел в арифметической прогрессии

1) Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии (т.е. содержащей бесконечное число членов) найдется член, в десятичной записи которого есть хотя бы одна цифра 0.

2) Обозначим через L длину (количество членов) некоторой арифметической прогрессии. Для какого наибольшего значения L вы сможете построить пример арифметической прогрессии длины L, такой, что десятичная запись ни одного ее члена не содержит нулей? (Возможно, здесь вы укажете конкретный пример, или способ построения, или доказательство существования соответствующей прогрессии и т.п.)

3) Останутся ли справедливыми утверждения пп. 1) и 2), если вместо цифры 0 взять какую-либо другую цифру $к$ $(1 \le к \le 9)$?

Сформулируйте гипотезы, аналогичные полученным в пп. 1) и 2), и, по возможности, проверьте их истинность для такого случая: в десятичной записи членов арифметической прогрессии ищется не отдельная цифра, а вполне определенная комбинация последовательно расположенных цифр (например, в числе 5123648 есть комбинация «123»).

12. Корни специальных рациональных уравнений

Известно, как определить рациональные корни уравнений вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$ с целыми (или рациональными) коэффициентами.

Попробуйте определить корни вида $a + в\sqrt{2}, a + в\sqrt{3}, \ldots, a + в\sqrt{n},$ где a, $в$ $\in$ $\mathbf{Q}$, таких уравнений (по крайней мере постройте алгоритмы определения таких корней). Может вы сможете определять корни более сложного вида (даже очень сложного вида – со многими вложенными корнями) и т.п. Следующий шаг в этой задаче – нахождение корней разного вида для рациональных уравнений, коэффициенты которых (т.е. самих уравнений) сами имеют достаточно сложный вид (например, $a + в\sqrt{2},$ где a, $в$ $\in$ $\mathbf{Q}$, и т.п.).

13. Задачи про суммы цифр различных чисел (отталкиваемся от известных).

Обозначим через $S(y)$ сумму цифр числа y.

А) Докажите, что существует бесконечно много номеров N, таких, что $S(2^N)>S(2^{N+1})$.

Б) Докажите, что $\to\infty$ при $n\to\infty$. Проверить, что это – предел или неограниченность последовательности!!! А что можно сказать про другие числа в степени n? Существуют ли числа, для которых подобная последовательность ограничена?

В) При каких K отношение суммы цифр N к сумме цифр $K\cdot N$ ограничено? А обратное отношение? Другие отношения?

14. Уравнения с биномиальными коэффициентами.

Известно, что 3003 = $C_{15}^{5} = C_{14}^{6}$ А) Решите в натуральных числах уравнение $C_{x+1}^{y} = C_{y+1}^{x}$. (AMM.65)

Б) Исследуйте уравнение вида $C_{x}^{y} = C_{z}^{t}$ в общем случае. Попробуйте разработать методы их решения. Найдите решения уравнений такого вида для указанных четырех переменных, удовлетворяющих каким-либо соотношениям.

15. «Незаконное» сокращение.

Доказать, что существуют лишь три правильные дроби со знаменателями меньшими 100, которые можно привести к несократимому виду, «незаконно» зачеркнув одинаковые цифры в числителе и знаменателе. Одна из них – это дробь 26/65 = 2/5. Найдите остальные две дроби и докажите, что других дробей, обладающих тем же свойством не существует. *Источник задачи:* № 302 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «АММ»)».

Общая постановка: Попробуйте рассмотреть такие же вопросы для чисел со знаменателем меньшим 1000 и т.п. Интересно, можно ли получить общие рекомендации для решения подобных задач.

16. Построения с помощью двусторонней линейки

(задача 0-го тура 14го РТЮМ (2012 г.), пункты 1-9 известны, пункт 10 в общей постановке новый, попробуйте использовать результаты пп. 1-9)

Предварительные задачи:

1. Даны две параллельные прямые. С помощью обычной линейки (без циркуля) разделите пополам отрезок, лежащий на одной из них.
2. Даны две параллельные прямые и точка *P*. Проведите через точку *P* прямую, параллельную данным прямым.

Во всех следующих пунктах построения следует выполнять с помощью двусторонней линейки (без циркуля), а именно: пусть имеется линейка с двумя параллельными краями, расстояние между которыми равно *a*, разрешаются следующие построения:

1) проводить прямую через две данные точки;
2) проводить прямую, параллельную данной и удаленную от нее на расстояние *a*;
3) через две данные точки *A* и *B*, где *AB* >*a*, проводить пару параллельных прямых, расстояние между которыми равно *a*. Таких пар параллельных прямых четыре: две пары такие, что точки *A* и *B* лежат на одной из этих прямых (назовем такие пары прямых – *внешними парами параллельных прямых для точек A и B*), и еще две пары такие, что точки *A* и *B* лежат на разных прямых (назовем такие пары прямых – *внутренними парами параллельных прямых для точек A и B*).

Рассмотрите следующие задачи:

3. а) Постройте биссектрису данного угла *AOB*.
   б) Дан острый угол *AOB*. Постройте угол *BOC*, биссектрисой которого является луч *OA*.
4. а) Восстановите перпендикуляр к данной прямой *l*.
   б) Восстановите перпендикуляр к данной прямой *l*, проходящий через данной точку *A,* лежащую на прямой *l*.
   в) Восстановите перпендикуляр к данной прямой *l*, проходящий через в точку *A,* не лежащую на прямой *l*.
5. а) Постройте середину данного отрезка.
   б) Через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.
6. Даны угол *AOB*, прямая *l* и точка *P* на ней. Проведите через точку *P* прямые, образующие с прямой *l* угол, равный углу *AOB*.
7. Даны отрезок *AB*, непараллельная ему прямая *l* и точка M на ней. Постройте точки пересечения прямой *l* с окружностью радиуса *AB* с центром *M*.
8. Даны прямая *l* и отрезок *OA*, параллельный *l*. Постройте точки пересечения прямой *l* с окружностью радиуса *OA* с центром *O*.
9. Верно ли, что все задачи на построение, решаемые (выполняемые) с помощью циркуля и линейки, могут быть решены с помощью двусторонней линейки (попробуйте построить соответствующую теорию: сформулируйте необходимые определения, аксиомы, утверждения, обоснования).
10. Какие задачи на построение могут быть решены с помощью обычной линейки на клетчатой плоскости (попробуйте построить теорию таких построений, аналогичную пунктам 3-9).

17. **Свойства последовательностей циклических *n*-к** (задача 0 тура 13 РТЮМ (2011г.))

Обозначим $A_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ упорядоченный набор, состоящий из n неравных нулю действительных чисел. Из этого набора получается новый $A_2 = (a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1)$ по следующему правилу: каждое число умножается на следующее, последнее – на первое. Из набора A_2 получается набор A_3 по этому же правилу и т.д. Будем называть такие наборы циклическими n-ками. n-ки, состоящие из одинаковых чисел, будем называть скалярными. Скалярную n-ку, состоящую из одних единиц, будем называть единичной и обозначать через E, т.е. $E = (1, 1, \ldots, 1)$.

1.1. Докажите, что если все числа $a_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то последовательность циклических n-к периодическая.
1.2. Докажите, что если $n = 2^k$ $(k \geq 1)$ и все $a_i = \pm 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то через конечное число операций получится единичная n-ка. (Докажите это утверждение хотя бы для некоторых значений k).
1.3. Попробуйте указать другие значения n (не равные 2^k), при которых будет выполняться условие пункта 1.2. (Найдите как можно больше таких n).
1.4. Попробуйте получить необходимые и достаточные условия, при которых из n-ки, состоящей из ± 1, за конечное число операций получится единичная n-ка.

Исследуйте свойства произвольных положительных n-к. В частности:

2.1. Пусть $n = 3$. Получите необходимые и достаточные условия периодичности последовательности циклических троек. В зависимости от чисел начальной тройки исследуйте следующие вопросы:
- длину периода,
- с какого момента начинается первый период,
- при каких условиях возможно повторение в последовательности исходной тройки,
- условия, при которых из начальной n-ки A_1 может получиться скалярная n-ка.

2.2. Исследуйте вопросы пункта 2.1:
а) при $n = 4$;
б) при других значениях n $(n > 4)$.

Предложите свои обобщения и/или направления исследования в этой задаче и исследуйте их.

18. **Подобие, гомотетия и площади многоугольников** (задача 0 тура 12го РТЮМ (2010г.),

1.1. Площадь треугольника ABC равна S. Треугольник A_1B_1C получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке C и коэффициентом 2 (точки A_1 и B_1 лежат на лучах CA и CB за точками A и B). Аналогично, треугольник AB_2C_2 получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке A и коэффициентом 2, треугольник A_3BC_3 получен из треугольника ABC с помощью гомотетии с центром в точке B и коэффициентом 2. Обозначим точки пересечения пар прямых A_1B_1 и A_3C_3, A_1B_1 и B_2C_2, A_3C_3 и B_2C_2 соответственно через A_0, B_0 и C_0. Найдите площадь треугольника $A_0B_0C_0$.
1.2. Чему будет равна площадь треугольника $A_0B_0C_0$, если коэффициенты гомотетии пункта 1.1 равны не 2, 2, 2, а p, q, r соответственно?
1.3. Проделайте аналогичные построения и исследования для параллелограмма $ABCD$.
1.4. Проделайте аналогичные построения и исследования для тетраэдра $ABCD$.

Исследуйте эту задачу в одном или нескольких следующих направлениях.

2. Обозначим прямую AB из пункта 1.1 через c_1, прямую A_1B_1 через c_2, прямую, проходящую через точку C параллельно прямой c_1 через c_0. Продолжим построение прямых, параллельных c_1 и таких, что расстояние между парами соседних прямых одинаково для всех пар; будем последовательно обозначать их c_3, c_4, c_5 для одной полуплоскости и c_{-1}, c_{-2}, c_{-3} для другой (в частности, прямая c_{-2} пройдет через точку C_0). Аналогично построим серии параллельных прямых a_k и b_m, $k,m \in \mathbf{Z}$.

Ясно, что при пересечении любых трех прямых a_k, b_m и c_n, $k,m,n \in \mathbf{Z}$. Получится некоторый треугольник (обозначим его KLM), подобный исходному треугольнику ABC. Можно ли получить треугольник KLM из треугольника ABC с помощью одной или нескольких гомотетий описанного выше типа? (Введите свои – возможно новые – обозначения для точек пересечения рассматриваемых прямых.)

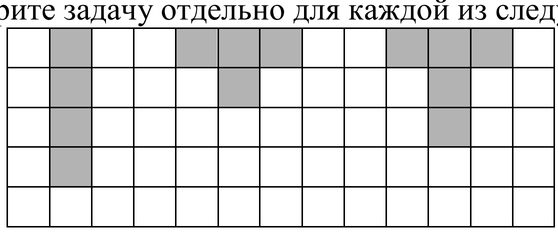
Укажите по возможности более короткую последовательность гомотетий (центров и коэффициентов гомотетий) для получения треугольника KLM из треугольника ABC; в качестве центров гомотетий можно использовать любые точки пересечения прямых.

3. Исследуйте задачу аналогичную пункту 1.3 для произвольных четырехугольников (или хотя бы для некоторых классов четырехугольников, например, трапеций или даже равнобедренных трапеций). Попробуйте как можно более точно оценить сверху и снизу отношений площадей полученного и исходного четырехугольников (для различных классов четырехугольников или в целом для любых четырехугольников).
4. Рассмотрите подобные задачи в пространстве или предложите свои интересные направления исследования и по возможности исследуйте их.

19. Размещение тетрамино и пентамино (задача 1-го М/нТЮМ, 2009)

А. Для данного прямоугольника $m \times n$ найти число Т(m, n) непересекающихся тетрамино разного вида (или пентамино, см. рис.), которые можно разместить (вдоль линий прямоугольника) так, чтобы не было свободного места для размещения ни одной дополнительной фигуры.

Рассмотрите задачу отдельно для каждой из следующих фигур:



и другие.

Б. Два игрока играют на доске прямоугольной формы размером $m \times n$, расставляя по очереди тетрамино (пентамино как в пункте А). Проигрывает тот, у которого нет хода. Исследуйте эту игру: кто выигрывает на конкретных досках, какой стратегии он должен придерживаться и т.п.

Или по другому:

А. Задача о неплотной расстановке пентамино

а) На клетчатой доске 6×6 вдоль линий клеток расставляются фигурки вида буквы Т (см. рис.) так, чтобы они не накладывались друг на друга (касаться углами или сторонами фигурки могут, а также их можно поворачивать на 90°, 180° или 270°). Расстановку фигурок назовем плохой, если на доску нельзя поставить никакой новой фигурки без нарушения указанных условий. Каким наименьшим количеством фигурок можно добиться плохой их расстановки?

б) Каким наименьшим количеством фигурок вы сможете добиться плохой их расстановки на доске 7×7.

в) Исследуйте общую задачу о максимально неплотной расстановке фигурок типа «пентамино» на прямоугольных досках $m \times n$ (оцените количественные характеристики таких упаковок, возможные методы и алгоритмы упаковок и т.п.).

г) Два игрока играют на доске $m \times n$ по следующим правилам: каждый из них по очереди выставляет, если возможно на доску пентамино. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его соперник? Исследуйте игру при различных занчениях m и n.

д) Предложите свои направления или обобщения в этой задачи и исследуйте их.

Ответы для первых двух пунктов: а) Тремя фигурами. б) Тремя фигурами.

20. **Цикл нерешенных задач теории чисел** (по мотивам П.Эрдеша)

1. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le 2n$ - конечная последовательность положительных целых чисел. Докажите, что $\min[a_i, a_j] \le 6([n/2]+1)$, где под знаком минимума стоит НОК двух чисел. Минимум берется по всевозможным парам, выбранным из последовательности. Можно ли улучшить эту оценку. *Источник задачи:* **нерешенный** № 138 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

2. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2n$ - конечная последовательность положительных целых чисел. Докажите, что $\max(a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c$, где под знаком максимума стоит НОД двух чисел, c – констатнта. Максимум берется по всевозможным парам, выбранным из последовательности. Можно ли улучшить эту оценку. *Источник задачи:* **нерешенный** № 139 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

3. Попробуйте изучить другие неравенства подобного вида.

4. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le 2n$ - натуральные числа такие, что НОК любых двух из них больше $2n$. Докажите, что $a_1 > [2n/3]$. *Источник задачи:* № 364 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

5. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le 2n$ - положительные целые числа такие, что ни одно из них не делится ни на какое другое из этой последовательности. Докажите, что $a_1 \ge 2^k$, где k определяется неравенствами $3^k < 2n < 3^{k+1}$. Эта оценка для a_1 неулучшаема. *Источник задачи:* № 134 из сб. «400 олимпиадных задач для школьников и студентов (из журнала «AMM»)».

6. . Исследуйте другие свойства таких последовательностей.

7. **(П.Эрдеш)** Пусть f(n) – мощность наибольшего множества чисел из отрезка [1, n], не содержащего членов, делящих два других. Насколько большим может быть f(n) (Эрдеш)?
С другой стороны, можно задать такой вопрос: каково наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих n, без чисел, являющихся делителями двух других? Более общо: Эрдеш ставит вопрос о наибольшем количестве чисел, не делящимися k другими. В частности, при $k = 1$ ответ – [n/2].

8. Плотность последовательности натуральных чисел с НОК каждой пары меньше, чем *x (Эрдеш)*.
Пусть A = $\{a_i\}$ – возможно неограниченная, строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Количество элементов этой последовательности, не превосходящих x, обозначим A(x). Под плотностью последовательности назовем предел A(x)/x, если он существует.

Каково максимальное значение A(x), если НОК(a_i, a_j) каждой пары не превосходит x. Оцените A(x).

Сравните эту задачу с предыдущими.