Республиканский турнир юных математиков – игра и соревнование, правила и задачи, вопросы и ответы

Задворный Б.В., заместитель декана факультета прикладной математики и информатики БГУ, кандидат физико-математических наук, заместитель сопредседателя оргкомитета турнира

Лавринович Л.И., старший преподаватель факультета прикладной математики и информатики БГУ, член оргкомитета и жюри турнира

Макаров Е.К., заведующий отделом Института математики Национальной Академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, председатель жюри турнира

1°. Введение

Мы уже рассказывали на страницах журнала «Матэматыка: праблемы выкладання» о таких соревнованиях школьников как турниры юных математиков (см., в частности, статью «Турниры юных математиков – республиканские и международные», 2011г., № 2, с. 46-49). Эти строки пишутся в преддверии очередного 15-го Республиканского турнира юных математиков. Следует отметить, что известность турнира растет с каждым годом. Растет число заявок на участие в нем – в этом году было поданы 32 предварительные заявки (в прошлом году – 28), причем 21 команда подтвердила свои намерения подачей официальных заявок и предварительных решенийя исследовательских заданий турнира. Проводятся региональные турниры (в Минской, Гомельской и Гродненской областях). Вот уже 5 лет проводятся международные турниры юных математиков, причем по существу по нашим правилам. Участие нашей белорусской сборной в международных турнирах следует признать более чем успешным – за эти годы завоеваны три диплома I степени и два диплома II степени.

Отметим, что согласно правилам проведения в официальной – очной части турнира могут принять лишь 16 команд Поэтому уже на предварительном заочном этапе его развернулась серьезная борьба между командами за выход в основную часть.

Чем же обусловлена растущая популярность турнира, несмотря на сложность заданий (см. часть 4 статьи), сложность правил проведения (см. часть 2 статьи) и сложность борьбы на всех этапах?

Действительно задания турнира сложные, они не похожи ни на задачи из учебника, ни на олимпиадные задачи, к которым привыкли наши дети. Как мы говорим, они носят исследовательский характер, интересны как с теоретической, так и с практической точки зрения, многие из них реально составляют основу сильных работ учащихся на последующих конференциях юных ученых разного уровня – от республиканского до международного.

Решение (исследование) таких задач и их представление тоже совершенно не похожи на решение и оформление задач, с которыми постоянно встречаются наши учащиеся. Все это обусловлено спецификой турнира и его правил.

Весь процесс выглядит примерно так. Сначала необходимо долго – в течение двух месяцев, а то и больше «решать» эти задачи, разделив их между участниками команды (отсюда первую очередь и вытекает принцип «командности» в работе и необходимость активного участия руководителей, что является одной из важнейших составляющих успешной подготовки команды). Причем в слово «решать» здесь вкладывается не только собственно сам процесс поиска идей, методов, алгоритмов, доказательств и т.п., но и поиск дополнительной литературы и других источников, в частности, в Интернете, изучение их, сравнение своих результатов с известными, тренировка определенных навыков проведения исследовательской работы, оформление результатов и обоснований, подготовка презентаций и докладов по своим результатам.

Кроме этого (или после этого) необходимо подготовиться и суметь защитить свои результаты, отстоять в дискуссии. Более того, уже в ходе самого турнира нужно по достоинству оценить решения соперников – написать письменные отзывы (рецензии) на их материалы, убедить жюри и зрителей в правильности своей точки зрения на определенные результаты.

А если учесть, что такая многогранность турнира сочетается с игровыми моментами – жеребьевками, тактическими и стратегическими схемами, и все это проходит в довольно интенсивном режиме (очная часть турнира обычно длится 5-6 дней), то становится ясно, что турнир юных математиков – это очень полезное, но сложное мероприятие и не всякая команда – даже из достаточно сильной школы или гимназии может сразу все это выдержать, особенно без опыта участия.

Видимо поэтому многие команды, подав предварительные заявки на участие в турнире, в последствии не подтверждают их. Надеемся, что для многих участников команд даже такая незавершенная (неудавшаяся) попытка участия не проходит даром – те исследования (решения), которые они провели, будут представлены ими на различных конференциях – конкурсах исследовательских работ. Мы же в свою очередь приветствуем участие в турнире наблюдателей для лучшего понимания всех нюансов борьбы – от чисто математической до тактической и организационной. Ярким примером того, как трудно бывает командам новичкам является результат участи команды Китая на V Международном турнире юных математиков (подробнее см. на сайте www.itym.org).

2°. Из правил проведения республиканских турниров юных математиков

(полностью правила проведения Республиканского турнира юных математиков см. на сайте www.uni.bsu.by)

Турнир юных математиков – командные соревнования учащихся в умении решать математические задачи исследовательского характера, грамотно и убедительно представлять полученные результаты, аргументированно отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях.

Часть 1. Подготовка турнира

2. *Участниками* турнира являются команды учащихся, создаваемые и направляемые на турнир учреждениями образования. Кроме участников на турнир могут приглашаться наблюдатели.

2.1. К участию в турнире допускаются как команды, представляющие одно учреждение образования, так и сборные команды города, района или нескольких учреждений образования.

3. Команде, претендующей на участие в турнире, следует не менее чем за полтора месяца до начала турнира подать в оргкомитет *предварительную заявку* в произвольной (в том числе устной) форме. На основании предварительных заявок оргкомитет составляет список команд-претендентов. Команды, не подавшие предварительную заявку, не включаются в этот список и впоследствии не принимают участия в турнире.

4. Не позже чем за четыре недели до начала турнира команда-претендент должна подтвердить свое участие в отборе команд на турнир путем подачи в оргкомитет *официальной заявки* (по форме приведенной в Приложении А).

Вместе с официальной заявкой команда должна представить в оргкомитет предварительные материалы (п. 5) по всем выполненным заданиям.

5. Для участия в турнире команде необходимо (но не достаточно) выполнить не менее семи заданий из числа предложенных оргкомитетом. Предварительные результаты проведенных исследований (*предварительные материалы*) следует подготовить к моменту подачи официальной заявки (см. п. 4).

В оставшееся время до начала турнира исследовательская работа по заданиям турнира может продолжаться. Усовершенствованные результаты, полученные к моменту начала турнира, оформляются как *окончательные материалы*.

7. Предварительные материалы всех команд рассматривает и оценивает жюри турнира. Каждое представленное решение получает две официальных письменных рецензии и оценку в пределах от 0 до 20 баллов. Главными критериями оценки являются полнота и оригинальность исследования, а также четкость представления и обоснования результатов. Полученные каждой командой баллы суммируются по всем выполненным ею заданиям и используются в качестве основного критерия для приглашения на турнир (п. 8), а также для определения стартового рейтинга.

7.1. Жюри турнира обеспечивает соблюдение конфиденциальности в отношении представленных материалов.

8. На турнир приглашается не более 16 команд из числа выполнивших не менее семи заданий и получивших наибольшие суммы баллов за предварительные материалы (п. 7). Решение о приглашении команд на турнир принимается оргкомитетом на основании предложений жюри турнира и утверждается приказом Министерства образования.

9. По прибытии на турнир команды проходят *регистрацию*, во время которой сдают в жюри турнира свои окончательные материалы в четырех экземплярах.

9.1. Команда не имеет права вносить изменения в свои окончательные материалы после их сдачи в жюри турнира.

Часть 2. Порядок проведения турнира

15. Для планирования турнира и разрешения спорных ситуаций, возникающих при его проведении, используется корректируемый рейтинг команд.

Рейтинг каждой команды – это величина, аккумулирующая результаты, получаемые командой в ходе турнира, и призванная отражать ее относительную силу в ряду других участников.

15.1. После окончания регистрации участников турнира каждой команде присваивается *стартовый рейтинг*, исчисляемый на основе рассмотрения и оценки предварительных материалов команды по формуле $\mathbf{R_{ст} = 0{,}5 \cdot S_к / S_{ср}}$, где $\mathbf{R_{ст}}$ – стартовый рейтинг команды, $\mathbf{S_к}$ – сумма баллов, полученных командой за предварительные материалы, $\mathbf{S_{ср}}$ – среднее арифметическое сумм баллов, выставленных за предварительные материалы командам, прибывшим на турнир.

16. Результаты турнира определяются исходом финальных боев. В основном финальном бое участвует, как правило, четыре команды. Первоочередное право на выход в основной финал имеет абсолютный победитель (п. 30) всех боев отборочных туров, в которых принимала участие команда. Кроме того, в основной финальный бой могут допускаться команды с наиболее высоким текущим рейтингом.

18. Первое, второе и последующие места в турнире присуждаются командам, занявшим соответствующие места в основном финальном бое. Участникам малого финала (в случае его проведения) присуждаются места, непосредственно следующие за местами, занятыми участниками основного финала. Остальные участники следуют за ними в порядке убывания своего окончательного рейтинга.

19. Победителями турнира признаются участники основного финального боя и команды, занявшие более высокие места в малом финале.

19.1. Решение об определении победителей и распределении дипломов первой, второй и третьей степени между ними принимает и согласовывает с оргкомитетом жюри турнира.

19.3. По решению оргкомитета определение победителей может быть произведено по правилам, отличным от правил, устанавливаемых пунктом 19.

Часть 3. Правила математического боя

Математический бой – главная составная часть турнира юных математиков. Под математическим боем понимается организованная дискуссия нескольких команд, в которой каждая участвующая команда поочередно выступает в качестве докладчика своих результатов, оппонента по выступлению докладывавшей команды и рецензента, оценивающего качество дискуссии двух других команд.

20. Команды, участвующие в математическом бое, называются *участниками боя*. Как правило, в бое участвуют четыре команды. В некоторых случаях (пп. 11, 16, 17) возможно проведение боев с участием трех или пяти команд. Все участники одного боя образуют *состав боя*.

20.1. Математический бой состоит из нескольких раундов, в каждом из которых обсуждается одна задача, отличная от задач других раундов. Количество раундов совпадает с числом команд, участвующих в этом бое. В каждом раунде команда-участник исполняет только одну из ролей: Докладчика (Д), Оппонента (О), Рецензента (Р) или Наблюдателя (Н). Содержание этих ролей и обязанности их исполнителей определяются пунктом 26. Оппонент, Рецензент и Наблюдатели называются оппонирующими командами (участниками).

20.2. В основном случае четырехкомандного боя порядок смены ролей, исполняемых командами в последовательных раундах определяется следующей *схемой боя.*

Команды	Раунды			
	1	2	3	4
Команда 1	Д	Н	Р	О
Команда 2	О	Д	Н	Р
Команда 3	Р	О	Д	Н
Команда 4	Н	Р	О	Д

21. Состав боя определяется полной схемой турнира. Порядок выступления команд в бое и обсуждаемые задачи определяются путем жеребьевки. Жеребьевка каждого боя проводится в два этапа, отдельно от жеребьевки других боев.

22. После окончания жеребьевки всем оппонирующим участникам каждого раунда боя выдаются материалы, предоставленные соответствующими Докладчиками, для изучения и подготовки письменных отзывов и устных выступлений по ним. В этой подготовке может участвовать руководитель команды.

24. Во всех боях, кроме финальных, присутствие во время боя руководителей команд, участвующих в бое, допускается только в исключительных случаях и с согласия председателя жюри турнира. В финальных боях руководители команд должны находиться отдельно от своих команд.

25. Порядок прохождения и регламент действий в каждом раунде.

Обязательные действия		
1	Перерыв. Проветривание помещения. Совещание жюри боя. Подготовка Докладчика к докладу	12 мин (*или более, в пределах времени, отведенного на раунд*)
2	Объявление оценок предыдущего раунда либо Представление жюри боя (в первом раунде)	до 5 мин
3	Выступление Докладчика с докладом	до 10 мин
4	Вопросы Оппонента Докладчику и ответы Докладчика, выступление Оппонента, ответ Докладчика на выступление Оппонента	до 10 мин
5	Вопросы Рецензента Докладчику и Оппоненту, ответы Докладчика и Оппонента, выступление Рецензента	до 7 мин
Необязательные действия		
5	Заключительное слово Докладчика	до 3 мин
6	Дополнительное выступление Оппонента	до 2 мин
7	Дополнительное выступление Рецензента	до 2 мин
8	Вопросы и выступления Наблюдателя	до 2 мин

9	Вопросы и замечания жюри, ответы участников боя	до 5 мин
Итого, время одного раунда вместе с перерывом		не более 60 мин

26. Обязанности участников боя

26.1. Докладчик в своем основном выступлении должен кратко, но максимально полно и четко изложить результаты, полученные командой по задаче, дать ясное представление о методах, которыми они получены. Результатами могут являться как конкретные утверждения, так и метод решения, придуманный командой, или способ применения тех или иных методов (утверждений) к решению других задач, или даже специально построенный контрпример. В заключение доклада необходимо сделать резюме – кратко сформулировать важнейшие результаты. Докладчик должен стремиться к тому, чтобы его выступление было понятно аудитории.

Доклад команды должен соответствовать окончательным материалам по обсуждаемому заданию (п. 5) за исключением исправлений обнаруженных несущественных ошибок. В последнем случае это должно быть специально оговорено в выступлении.

26.2. Все оппонирующие команды каждого боя не менее чем за 30 мин до начала боя должны сдать в жюри письменные отзывы на предоставленные им материалы Докладчиков этого боя. Объем отзыва не должен превышать двух страниц формата А4 и должен содержать конкретные комментарии и замечания к докладу, удовлетворяющие требованиям п. 26.3.

26.3. Оппонент в своем выступлении дает оценку доклада, указав важнейшие с его точки зрения результаты, степень их обоснованности (доказанности), существенные и несущественные неточности в доказательствах, неверные утверждения (если таковые имеются). При этом необходимо использовать следующую шкалу оценок:

* верный и правильно доказанный результат,
* верный, но недоказанный (доказательство отсутствует или в нем допущены ошибки) результат,
* сомнительный (и, разумеется, недоказанный) результат,
* неверный результат.

26.4. Рецензент в своем выступлении оценивает, во-первых, выступление Оппонента: объективность оценки им доклада и его результатов, существенность и корректность заданных вопросов, а во-вторых – ответы Докладчика: их четкость, убедительность, находчивость. В случае необходимости Рецензент дает свою оценку доклада (например, если его оценка не совпадает с общей оценкой Оппонента, или в докладе есть недостатки, не замеченные Оппонентом, и т.п.).

26.5. Каждая команда-Наблюдатель имеет право на участие в дискуссии, если у нее имеются существенные дополнения или замечания, вызванные ходом дискуссии и не указанные Докладчиком, Оппонентом и Рецензентом. Выступления Наблюдателей должны удовлетворять требованиям пп. 26.3 и(или) 26.4. Малосодержательные выступления Наблюдателей, необоснованно затягивающие дискуссию, могут получить отрицательную оценку, снижающую итоговую сумму баллов команды.

27. Действия участников боя в каждом раунде оцениваются по следующим критериям: выполнение командами требований пункта 26 правил, умение команд представить и защитить результаты своих исследований, способность правильно оценить результаты других участников, грамотно, убедительно и корректно вести дискуссию.

Кроме того, при оценке доклада жюри должно принимать во внимание количество и качество результатов, полученных Докладчиком при выполнении задания с учетом его сложности.

28. Выставление оценок и определение результатов боя

Жюри боя определяет результаты каждого раунда и математического боя в целом посредством выставления оценок каждому из его участников. Эти оценки должны основываться на критериях п. 27.

28.1. После завершения действий текущего раунда каждый член жюри боя выставляет всем участникам боя оценки за дискуссию, а оппонирующим участникам, кроме того, – оценку за письменный отзыв в пределах, установленных п. 28.3.

28.2. Оценки**,** выставленные командам членами жюри, переводятся в баллы по правилам п. 28.3 и суммируются. Полученная сумма называется *итоговым баллом команды за раунд*. После завершения боя полученные командой итоговые баллы за все раунды суммируются. Полученная сумма называется *итоговой суммой баллов за бой* и используется при подведении итогов боя (п. 29), а также для корректировки текущего рейтинга команды.

28.3. Пределы оценок, выставляемых участникам боя, и перевод оценок в баллы

	Оценка за письменный отзыв x	Оценка за дискуссию y	Ролевой коэффициент (*применяется только к оценке за дискуссию*) k	Балл, выставляемый команде
Докладчик	–	$0 \le y \le 10$	$k = 3$ (*или менее)*	ky
Оппонент	$0 \le x \le 5$	$0 \le y \le 5$	$k = 2$	$x + 2y$
Рецензент	$0 \le x \le 5$	$0 \le y \le 5$	$k = 1$	$x + y$
Наблюдатель	$0 \le x \le 5$	$-3 \le y \le 5$	$k = 1$	$x + y$

28.5. При определении результатов финальных боев в итоговую сумму баллов команды за бой кроме баллов, полученных в ходе боя включается *турнирный балл*, получаемый умножением текущего рейтинга команды (определенного на момент начала финального боя) на число учитываемых оценок в финальном бое и на турнирный коэффициент, равный 5.

29. Подведение итогов боев

29.1. Первое место в математическом бое присуждается команде, набравшей наибольшую итоговую сумму баллов за бой (п. 28.2), а также всем командам, набравшим не менее 95% от этой суммы.

29.2. Последующие места присуждаются командам с меньшими итоговыми суммами баллов в порядке убывания; при этом командам присуждаются одинаковые места, если несколько команд имеют не менее 95% от суммы, набранной первой из них.

30. Если первое место в бою присуждено только одной команде, то такое первое место называется единоличным, а команда, занявшая его, считается абсолютным победителем этого боя.

3°. Вопросы и ответы (из бесед с участниками турниров)

Как следует понимать сказанные на закрытии одного из турниров слова председателя жюри о том, что турнир – это игра?

Так и понимать, как сказано: турнир – это игра, нечто среднее между футболом и шахматами. В этой игре победа не всегда на стороне сильнейшего, за нее нужно бороться. Нужно уметь держать удар. Нужно уметь проигрывать, не впадая в истерику. Нужно уметь выигрывать не зазнаваясь. А самое главное–надо играть честно.

Что значит играть честно?

Как и граница между военной хитростью и предательством, так и граница между тактическим ходом и нечестной игрой не везде обозначена, но всегда есть. Участникам турнире легче, чем воюющим сторонам – если они не найдут эту границу, ее им укажет жюри.

В любом случае за пределами честной игры лежат:

- плагиат,
- решение заданий чужими силами,
- внесение в доклад существенных изменений под видом исправления опечаток

и многое, многое другое…

Для чего нужен письменный тур?

Письменный тур проводится для того, чтобы узнать, насколько сильна команда, приехавшая на турнир сама по себе, без помощи своего руководителя, а возможно и других посторонних помощников, наличие или отсутствие которых в процессе подготовки команды к турниру жюри непосредственно проконтролировать не может.

Может ли команда уйти с турнира?

Вплоть до момента регистрации команда может уйти с турнира без всякого объяснения причин. Отказ команды от участия после регистрации крайне нежелателен, а после жеребьевки боев первого тура и позднее – совершенно недопустим. Оргкомитет и жюри турнира будет использовать все имеющиеся в его распоряжении средства для предотвращения таких уходов, поскольку такое поведение команды вносит хаос в организацию турнира и наносит ущерб другим его участникам.

Что такое исследовательское задание и чем оно отличается от олимпиадной задачи?

Отличий, по крайней мере, два. Во первых, решение олимпиадной задачи полностью известно. Оно, как правило, короткое. Решение всех задач (пунктов), входящих в исследовательское задание, как правило, неизвестно даже самому его автору. Во-вторых, олимпиадная задача должна быть решена именно в той постановке, какая предложена для решения. При решении исследовательского задания можно предлагать свои варианты постановки задач, обобщающие, а иногда и упрощающие исходную, если это позволяет получить хорошие результаты.

Достаточно ли хорошо решать олимпиадные задачи, чтобы успешно выступать на турнире?

Нет, недостаточно. По двум причинам. Во-первых, задачи предлагаемые на турнир не олимпиадные, а исследовательские. Во-вторых, для успешного выступления на турнире необходимо не только получить хорошие результаты по задаче, но и сделать их понятными для других людей. Эта последняя задача только кажется простой и незначительной.

Нужно ли решать все пункты задачи в точном соответствии с опубликованным условием, либо достаточно решить только самый общий из них?

Безусловно, если решен только самый общий пункт, а решения менее общих достаточно очевидным образом следуют из сделанного, причем это явно отмечено в докладе, жюри будет считать, что решены все пункты. Но! Не следует забывать и о том, что докладчик должен стремиться сделать свой доклад понятным всем присутствующим. Иногда этого можно добиться только излагая решение начиная с самых простых случаев.

Можно ли вместо задачи, приведенной в опубликованном списке, решать другую задачу?

Если осторожно, то можно. Команда может, в разумных, конечно, пределах, отклониться от опубликованного условия задания, если такое отклонение позволяет получить нечто осмысленное и интересное: решение более сложной задачи, красивое решение близкой задачи или же, в конце концов, много результатов по более простой задаче.

Определение степени разумности всех этих действий и их оценка – прерогатива жюри.

Когда можно считать, что оппонент полностью и хорошо выполнил свою задачу?

Тогда, когда жюри может выставить правильные оценки за доклад, основываясь только на мнении оппонента.

Насколько важно хорошо оппонировать, рецензировать и наблюдать?

Не следует думать, что главное – сделать хороший доклад. В бою равных команд очень часто победа достается тем, кто лучше выступал в качестве оппонента, рецензента и наблюдателя. Бывали также случаи, когда победу одерживала заведомо более слабая команда, сделавшая средненький доклад, но хорошо выступившая во всех остальных ролях.

Как оценивается команда, не выполнившая требование о запрете внесения существенных изменений в доклад по сравнению со своими окончательными материалами?

Если доклад изменен полностью (такое было!), команда, в зависимости от обстоятельств, получает за доклад оценку 1 или 2 от каждого члена жюри.

Если доклад изменен частично, жюри не принимает во внимание измененную часть. Кроме того, оценка команды может быть дополнительно снижена за невыполнение требования правил.

Можно ли для решения заданий турнира использовать компьютеры? Если да, то в какой степени?

Многие задания, выносимые на турнир, могут быть сведены к комбинаторным задачам, легко решаемым полным перебором всех вариантов с помощью современной техники. Предлагая такие задачи для решения участникам турнира, оргкомитет и жюри надеются, что участники турнира отыщут более эффективные решения, чем простой перебор с помощью компьютера.

Как жюри оценивает выступления наблюдателей?

Жюри боя должно очень строго относиться к оценке выступлений наблюдателей, не позволяя им собирать легкие и безопасные баллы за «пустопорожние» выступления. Только очень существенное замечание наблюдателя должно получать положительную оценку. В противном случае оценка должна быть нулевой или даже отрицательной: несущественные выступления наблюдателей должны четко отсекаться оценками –1 и даже –2 или –3, особенно если такие несущественные выступления настойчиво повторяются или носят явно умышленный характер «охоты за дополнительными баллами», но по существу не несут новой информации.

Почему все время выигрывает команда 41 школы (теперь гимназии № 41 г.Минска)? Минчане в жюри ей подсуживают?

Во-первых, не всегда, хотя с 2004 года она действительно всегда является по крайней мере одним из победителей, в частности, в последние два года она делила первое место – сначала с командой Гомель-1, а потом с командой Лицей БГУ-1.

Во-вторых, в любом бою, кроме финального, больше половины жюри – руководители других команд, участвующих в турнире, в том числе и не минчане. А если вы не уверены в силе этой команды – встретьтесь с ней в математическом бою.

Кстати, команда 41 школы жалуется на несправедливость к ней судей больше, чем любая другая команда.

Какой вопрос на турнире самый часто задаваемый?

Чаще всего это вопрос, звучащий примерно так: почему нам так мало баллов, а им так много? Естественный ответ на него очевиден: сколько заработали, столько и получили.

Здесь не должно быть недоверия к жюри. Действительно состав жюри всегда большой – обычно не менее 7-8 человек, а в финалах не менее 9-10. Причем в состав жюри входят представители разных городов и учреждений образования или научных учреждений республики. При этом в каждом бою в жюри есть эксперты (т.е. особые знатоки) всех обсуждаемых задач. И в заключение отметим, что хотя члены жюри и ставят оценки независимо друг от друга, но, как многие говорят, «объективная оценка всегда складывается из суммы многих субъективных оценок ленно жюри» (кстати, самая большая и самая маленькая оценка всегда отбрасывается).

4°. Исследовательские задания XV республиканского турнира юных математиков

Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер, наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- необходимо максимально полно исследовать каждую задачу, но в то же время нужно иметь в виду, что в ряде задач интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем совсем необязательно ваши исследования должны совпадать с предложениями авторов;

- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом
  - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автора(ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований;
- при необходимости уточнить условия задач пишите по приведенным выше электронным адресам.

№ 1. Расстояния между точками на плоскости

1. Пусть M – произвольное множество точек на плоскости, любые три из которых лежат внутри круга радиуса R. Всегда ли множество M будет целиком лежать внутри некоторого круга радиуса R?
2. Пусть M – произвольное множество точек на плоскости, любые две из которых лежат на расстоянии, не большем 1. В круге какого наименьшего радиуса заведомо лежит любое такое множество?
3. Пусть на плоскости даны n различных точек (вершин), расстояния между которыми попарно различны. Построим ребра графа, соединив каждую вершину с ближайшей к ней вершиной отрезком (ребром). Может ли полученный граф: а) содержать цикл; б) иметь пересечения? Какова максимальная степень вершин такого графа?
4. Всегда ли внутри выпуклого многоугольника с площадью, большей $\pi/4$, будет содержаться пара точек, находящихся на единичном расстоянии друг от друга? Верно ли это утверждение для произвольной выпуклой фигуры?
5. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 2. Задача оптимальной обозримости объекта

Материальная точка перемещается по плоской кривой линии L. Из точек линии проводится наблюдение за объектом K, заданным в плоскости кривой L. Требуется определить положение (определенную точку) на кривой L, из которого объект K виден под наибольшим углом, а также величину этого угла. При исследовании решить следующие задачи.

1. Проведите геометрическое решение задачи, если L − прямая линия, а исследуемый объект K − отрезок AB, заданный координатами $A(x_1, x_2)$ и $B(y_1, y_2)$. В каких других случаях возможно геометрическое решение? Проведите его.
2. Рассмотрите случай, когда точка перемещается по графику функции $y=f(x)$, а исследуемый объект − отрезок AB. Найдите уравнение, определяющее координаты точек оптимального наблюдения, и величину максимального угла. Постройте алгоритм решения задачи.
3. Рассмотрите и решите задачу в случаях движения точки по окружности и эллипсу с центрами в начале координат.
4. Рассмотрите и решите задачу в случаях движения точки по параболе $y=ax^2$ и гиперболе $y = k/x$.
5. Решите задачу, когда точка перемещается по прямой линии, а наблюдаемый объект представляет собой: а) равносторонний треугольник, б) равнобедренный треугольник, в) квадрат, г) прямоугольник. Найдите положение (определенную точку) оптимального наблюдения и величину максимального угла. Постройте алгоритм решения задачи.
6. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 3. Минимальные подстроки

В данной задаче числа будем рассматривать как строки цифр. Будем говорить, что w – *подстрока* строки s, если w можно получить из строки s удалением некоторого количества цифр, и будем записывать $w < s$. Например, $514 < 352148$. Строки s и w будем называть *сравнимыми* если $w < s$, или $s < w$, или и то, и другое (в этом случае будем писать $s = w$). Если s и w не являются сравнимыми, то будем называть их *несравнимыми*. Например, 352148 и 8217 несравнимы.

Пусть S – множество строк, обозначим через $M(S)$ множество *минимальных строк множества* S. Строка w называется *минимальной строкой множества* S, если из того, что $x \in S$ и $x < w$, следует, что $x = w$.

1. Постройте $M(S)$, если $S = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024\}$.
2. Постройте $M(S)$, если S – множество натуральных чисел.
3. Постройте $M(S)$, если S – множество четных натуральных чисел.
4. Пусть S — множество всех составных чисел, докажите, что $M(S) =\{4; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 20; 21; 22; 25; 27; 30; 32; 33; 35; 50; 51; 52; 55; 57; 70; 72; 75; 77; 111; 117; 171; 371; 711; 713; 731\}$.
5. Постройте $M(S)$, если S – множество всех простых чисел.
6. Постройте $M(S)$, если S – множество всех четных совершенных чисел (Замечание. Напомним, что совершенное число – это число равное сумме всех своих делителей, включая 1, но не включая само число.)
7. Пусть S – степени двойки, докажите или опровергните, что $M(S) = \{1; 2; 4; 8; 65536\}$.
8. Предложите свои обобщения. Например, постройте $M(S)$, если S: а) множество квадратов натуральных чисел, б) множество чисел Фибоначчи, и т. д.

№ 4. Графики

На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Известно, что любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком функции $y = f(x)$ столько же общих точек, сколько с графиком функции $y = g(x)$. Назовем это условие условием $\boldsymbol{A}$.

1. Верно ли, что области определения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ совпадают?
2. Пусть $g(x) = 2x + 3$. Докажите, что тогда $f(x) \equiv 2x + 3$.
3. Пусть $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q, \end{cases}$, где Q – множество рациональных чисел. Докажите, что $f(x) \equiv g(x)$.
4. Пусть $g(x) = x^2$. Докажите, что $f(x) \equiv x^2$.
5. Пусть $g(x)$ – выпуклая (вогнутая) функция на всей своей области определения. Докажите, что $f(x) \equiv g(x)$.
6. Приведите пример функций f и g, для которых выполняется условие $\boldsymbol{A}$, но не выполняется соотношение $f(x) \equiv g(x)$.
7. Попробуйте описать все пары функций f и g, для которых из выполнения условия $\boldsymbol{A}$ следует, что $f(x) \equiv g(x)$.
8. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 5. Наборы, сравнимые по модулю

Обозначим $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Различные наборы (множества) натуральных чисел из N_n будем обозначать через M_n. Другими словами, $M_n \subset N_n$. В частности, M_n может быть пустым множеством или совпадать с N_n. Множество всех наборов M_n обозначим μ_n.

1. Назовем набор M_n четным и обозначим его в таком случае через $M_{n,2,0}$, если сумма его элементов (чисел) четная. Сумму элементов пустого набора естественно положить равной нулю. Множество всех четных наборов обозначим $\mu_{n,2,0}$. При необходимости аналогично будем рассматривать нечетные наборы $M_{n,2,1}$ и их множество $\mu_{n,2,1}$. (Замечание. Последняя цифра в индексе этих обозначений 0 или 1 означает остаток от деления на 2.)

Для четных наборов и только для них будем использовать также более короткие обозначения $M_{n,2}$ и $\mu_{n,2}$ (т.е. $M_{n,2} = M_{n,2,0}$ и $\mu_{n,2} = \mu_{n,2,0}$).

1.1. Сколько всего $M_{9,2}$ наборов (т.е. четных подмножеств N_9)?

1.2. Сколько всего $M_{11,2}$ наборов?

1.3. Общий вопрос: сколько всего $M_{n,2}$ наборов?

Напомним, что в теории множеств количество элементов конечного множества называют его *мощностью*. Таким образом, в вопросах 1.1–1.3 по существу требуется определить мощности множеств $\mu_{9,2}$, $\mu_{11,2}$, $\mu_{n,2}$. Для обозначения мощности часто используют прямые скобки, т.е. $|\mu_{9,2}|$, $|\mu_{11,2}|$, $|\mu_{n,2}|$. Будем далее использовать для обозначения мощности такое обозначение.

2. Аналогично вышеприведенным определениям и обозначениям введите понятие наборов, сравнимых по натуральному модулю p. В частности, набор чисел из N_n, сумма которых делится на p, обозначим $M_{n,p,0}$ или, короче, $M_{n,p}$. Множество всех таких наборов обозначим $\mu_{n,p} = \mu_{n,p,0}$.

2.1. Сколько всего $M_{n,3}$ наборов? Предложите общую или рекуррентную формулу, или какой-нибудь другой удобный способ определения этого значения.

2.2. Сколько всего $M_{n,p}$ наборов? Определите соответствующие количества хотя бы для некоторых значений p.

3. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их. В частности, для упрощения вычислений интерес представляет установление явной зависимости между мощностями множеств $|\mu_{n,p}|$, $|\mu_{n,q}|$ и $|\mu_{n,pq}|$ в различных случаях: а) p и q – взаимно просты, б) $q = p$, $q = p^2$ и т.п., в) НОД $(p, q) = d > 1$.

№ 6. Разрезания

Исходная задача. Сколькими способами можно вырезать из квадрата 9×9 квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3? (Способы вырезания, получаемые друг из друга симметрией или поворотом, будем считать различными.)

Общая постановка задачи.

1. Для каких натуральных чисел n из квадрата $n \times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
2. Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m \times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?
3. Рассмотрите обобщения этой задачи в следующих двух направлениях:

   а) Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m \times n$ можно вырезать квадрат $p \times p$ (p – заданное натуральное число) так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники 2×3?

   б) Для каких натуральных чисел m и n из прямоугольника $m \times n$ можно вырезать квадрат 3×3 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на прямоугольники $s \times t$, где s и t – заданные натуральные числа? (Рассмотрите хотя бы некоторые случаи значений s и t.)
4. Аналогично исходной задаче во всех пунктах 1 – 3 попробуйте указать или хотя бы оценить количество способов соответствующих вырезаний.
5. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 7. Прыг-скок

1. На первых пяти клетках клетчатой полоски 1×6 сидят пять кроликов (так что ровно одна клетка не занята). Кролики пронумерованы числами от 1 до 5 слева-направо, как показано на рис. 1. За один ход какой-то из кроликов может либо перескочить на соседнюю незанятую клетку, либо перепрыгнуть через кролика, сидящего на соседней клетке, в следующую за ним незанятую клетку. За какое наименьшее число ходов кролики смогут расположиться в обратном порядке, как показано на рис. 2?

Рис. 1

1	2	3	4	5	

Рис. 2

5	4	3	2	1	

2. Аналогичная задача с N кроликами на клетчатой полоске $1\times(N+1)$, где N – произвольное натуральное число.
3. Та же задача с N кроликами на более длинной клетчатой полоске $1\times(N+K)$, где N и K– произвольные натуральные числа.
4. На клетках клетчатой доски $n\times n$ сидят $n^2 - 1$ кроликов, так что нижняя правая клетка не занята. Кролики пронумерованы числами от 1 до $n^2 - 1$, как показано на рисунке 3. За один ход какой-то из кроликов может либо перескочить на соседнюю по стороне незанятую клетку, либо перепрыгнуть через кролика, сидящего на соседней по стороне клетке, в следующую за ним незанятую клетку. За какое наименьшее число ходов кролики смогут расположиться в обратном порядке, как показано на рисунке 4?

Рис.3

1	2	…	$n-1$	n
$n+1$	$n+2$	…	$2n-1$	$2n$
…	…	…	…	…
n^2-n+1	n^2-n+2	…	n^2-1	

Рис.4

n^2-1	n^2-2	…	n^2-n+1	n^2-n
…	…	…	…	…
$2n-1$	$2n-2$	…	$n+1$	n
$n-1$	$n-2$	…	1	

5. Предложите и исследуйте вариации данной задачи, например, когда разрешается перепрыгивать через несколько кроликов (не более двух, не более трех, ровно одного или ровно трех и т.п.).

№ 8. Число решений диофантовых уравнений

1) Конечно ли множество решений уравнений

$$3^x + 4^y = 5^z, \quad 3^x + 7^y = 4^z.$$

в натуральных числах x, y, z? Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), являющиеся решениями этих уравнений.

2) Пусть a, b, c – натуральные числа, большие 1. Может ли уравнение $a^x + b^y = c^z$ иметь бесконечное число решений в натуральных числах x, y, z?

3) Верно ли, что существует бесконечно много троек натуральных чисел a, b, c, для каждой из которых уравнение $a^x + b^y = c^z$ имеет не более одного решения в натуральных числах x, y, z?

4) Для каждой фиксированной тройки натуральных чисел a, b, c оцените число решений уравнения $a^x + b^y = c^z$ в натуральных числах x, y, z (по мере возможности проведите исследование или для некоторых, или для всех троек a, b, c).

5) Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

Замечание. Интерес представляет решение задачи, как в общем виде, так и для отдельных нетривиальных частных случаев.

№ 9. Независимые множества

Пусть задан простой конечный граф $G = (V_G, E_G)$, где V_G – множество вершин, E_G – множество рёбер графа G. *Порядком* графа G называется число $|V_G|$ его вершин. Подмножество (в том числе, и пустое) вершин графа называется *независимым множеством графа*, если никакие две вершины из этого множества не смежны. Обозначим через $i(G)$ число всех независимых множеств графа G. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. Наибольшее по мощности (количеству содержащихся во множестве элементов) независимое множество называется *наибольшим*. Обозначим через $mi(G)$ число всех максимальных независимых множеств, а через $MI(G)$ – число всех наибольших независимых множеств графа G.

1. Найдите точные значения или оцените величины $i(G)$, $mi(G)$, $MI(G)$, если G – один из следующих графов:

   1) простая цепь P_n порядка n ($n \geq 1$), т.е. граф с множеством вершин $V_{P_n} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством рёбер $E_{P_n} = \{x_i x_{i+1} \mid i = \overline{1, n-1}\}$;

   2) простой цикл C_n порядка n ($n \geq 3$), т.е. граф с множеством вершин $V_{C_n} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и множеством рёбер $E_{C_n} = \{x_i x_{i+1} \mid i = \overline{1, n-1}\} \cup \{x_n x_1\}$;

   3) корона $\tilde{G}$ графа G, т.е. граф с множеством вершин $V_{\tilde{G}} = V_G \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ и множеством рёбер $E_{\tilde{G}} = E_G \cup \{x_i y_i \mid i = \overline{1, n}\}$, где G – простая цепь или простой цикл с множеством вершин $V_G = \{x_1, \ldots, x_n\}$;

   4) дерево порядка n ($n \geq 1$), т.е. связный граф без циклов;

   5) лес порядка n ($n \geq 1$), т.е. граф без циклов;

   6) гусеница порядка n ($n \geq 1$), т.е. дерево, которое после удаления всех вершин степени 1 превращается в простую цепь;

   7) полный k-дольный граф $K_{m_1,\ldots,m_k}$ ($k \geq 2$, $m_1,\ldots,m_k \geq 1$), т.е. граф, вершины которого можно разбить на k непересекающихся подмножеств, состоящих из $m_1,\ldots,m_k$ вершин соответственно, так, что ребро соединяет две вершины в том и только в том случае, когда вершины принадлежат разным подмножествам (хотя бы для небольших значений k);

   8) граф прямоугольной $(m \times n)$-решётки $(m, n \geq 1)$, т.е. граф G с множеством вершин $V_G = \{(x, y) \mid x = \overline{1, m},\ y = \overline{1, n}\}$ и $ab \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $a = (x, y)$, $b = (z, t)$ и $|x - z| = 1$, $y=t$ или $|y - t| = 1$, $x=z$.

2. Исследуйте параметры $i(G)$, $mi(G)$, $MI(G)$ для других типов графов или предложите и изучите другие направления этой задачи.

№ 10. Игры с фишками – 2

1. а) В средней клетке полоски 1 × 2013 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй игрок передвигает ее на две клетки в любую сторону, потом первый – на 4 клетки, второй – на 8 и так далее (k-й сдвиг осуществляется на 2^{k-1} клеток). Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто выигрывает независимо от игры соперника?

   б) Исследуйте тот же вопрос для полоски $1 \times M$ (если M – нечетное, то изначально фишка стоит в средней клетке, если M – четное, $M = 2k$, то в k-ой или в $(k+1)$-й клетке).

   в) Исследуйте вопросы предыдущих пунктов, если на k-м ходу игрок должен передвинуть фишку на P^{k-1} клеток, где P – некоторое наперед заданное натуральное число (хотя бы для некоторых значений P).

   д) Исследуйте вопросы предыдущих пунктов в случае, если фишка изначально стоит в произвольной клетке полоски.

2. а) В средней клетке полоски 1 × 2013 стоит фишка. Два игрока играют по тем же правилам, что и в задаче 1.а), но на k-м ходу игрок передвигает фишку на $2k$–1 клетку. Кто выигрывает независимо от игры соперника?

   б) Тот же вопрос для полоски $1 \times M$.

в) Тот же вопрос, если последовательность ходов является произвольной арифметической прогрессией, т. е. на k-м ходу игрок передвигает фишку на $a+d(k–1)$ клеток, где a, d – некоторые заданные натуральные числа.

г) Вопросы предыдущих пунктов, но фишка изначально стоит в произвольной клетке полоски.

3. Пусть $\{a_n\} \subseteq \boldsymbol{N}$, $n = 1, 2, \ldots$, причем $a_n < a_{n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Исследуйте вопросы предыдущих пунктов при условии, что на k-м ходу игроки перемещают фишку на a_k клеток в произвольном направлении. В частности, рассмотрите случаи, когда $\{a_n\}$ – а) некоторая геометрическая прогрессия, б) последовательность Фибоначчи, в) такова, что $a_n = n^2$, г) сумма некоторых двух из вышерассмотренных последовательностей, и т.д.
4. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.

№ 11. Бег по кругу

I. Спортсмены с одинаковой скоростью бегут по беговой дорожке. Каждый спортсмен бежит по окружности, не переходя на другие окружности. Спортсмены могут встретиться, если они бегут по одной окружности в противоположных направлениях, или если они бегут по разным окружностям, но одновременно оказываются в общей для этих окружностей точке. Имеется момент, когда никакие два спортсмена не находятся в одной и той же точке. Известно, что из любых трех спортсменов хотя бы двое иногда встречаются.

1) Требуется ответить на вопрос, какое максимальное число спортсменов может одновременно бежать по беговой дорожке, если беговая дорожка состоит из n одинаковых окружностей с центрами в вершинах правильного n-угольника, а радиусы окружностей равны половине стороны этого n-угольника. Рассмотрите сначала случаи одной окружности (т.е. вместо многоугольника рассматривается точка); двух касающихся окружностей (т.е. вместо многоугольника рассматривается отрезок); трех окружностей; четырех и пяти одинаковых окружностей.

2) Ответьте на вопрос пункта 1) в случае, если радиусы окружностей равны радиусу описанной около этого n-угольника окружности.

3) Попробуйте ответить на вопрос пункта 1), если окружности имеют разные радиусы. Например, беговая дорожка состоит из двух видов окружностей, радиусы которых равны $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$ стороны этого n-угольника, причем окружности разного радиуса чередуются. Предложите свои варианты для окружностей трех видов, n видов.

II. Заметим, что правильный n-угольник можно рассматривать как граф, который является простым циклом. Попробуйте ответить на вопросы пункта **I** для других видов графов. Например, для произвольного цикла, для дерева, для двудольного графа, и др.

III. 1) Рассмотрите вопросы пункта **I**, но при условии, что из любых четырех спортсменов хотя бы двое иногда встречаются.

2) Замените указанное в п.III 1) условие на следующее: из любых k спортсменов можно выбрать m спортсменов так, что любые двое из этих m спортсменов иногда встречаются. Здесь k и m – некоторые натуральные числа. Исследуйте эту задачу хотя бы для некоторых значений k и m.

IV. Предложите свои обобщения задачи. Например, рассмотрите другие формы беговой дорожки, которые не сводятся тривиально к указанным выше случаям.

№ 12. Операция

I. Каждой паре элементов a, b непустого множества M действительных чисел поставлено в соответствие число $a*b$ из M так, что полученная операция удовлетворяет следующим двум условиям:

а) для любых a, b из M уравнение $x*a = b$ имеет единственное решение в M, которое мы обозначим через b / a;

б) $(a*b)*c = (a*c)*(b*c)$ для любых a, b, c из M.

1) Пусть $a*c = b*c$. Следует ли отсюда, что $a = b$?

2) Приведите пример множества и заданной на нем операции, которая удовлетворяет условиям а) и б).

3) Следует ли из условий а) и б), что $a*b = b*a$ для любых a, b из M?

4) Следует ли из условий а) и б), что $(a*b)*c = a*(b*c)$ для любых a, b, c из M?

Докажите следующие тождества:

5) $(a / b) / c = (a / c) / (b / c)$;

6) $(a / b)*c = (a*c) / (b*c)$.

7) Найдите все решения уравнений $x*x = a$, $x*x*a = b$.

8) Придумайте еще какое-нибудь тождество, которому удовлетворяет любая операция *, заданная на любом множестве M и обладающая свойствами а) и б), и докажите его.

II. Ответьте на вопросы пункта **I**, если условие а) заменить на условие

а′) для любых a, b из M уравнение $a*x = b$ имеет единственное решение в M, которое мы обозначим через b / a.

III. Ответьте на вопросы пункта **I**, если условие б) заменить на условие

б′) $a*(b*c) = (a*b)*(a*c)$ для любых a, b, c из M.

IV. Предложите свои обобщения этой задачи и исследуйте их.