Снова о турнирах юных математиков – старое и новое, или памятка командам и жюри

Задворный Б.В., кандидат физико-математических наук, заместитель декана факультета прикладной математики и информатики БГУ, вице-президент организационного комитета Международного турнира юных математиков

1°. Введение

Эта статья по сути продолжает цикл статей, посвященных таким соревнованиям школьников как турниры юных математиков (см. статьи **[1]** «Турниры юных математиков – республиканские и международные» // «Матэматыка: праблемы выкладання», 2011 г., № 2, с. 46-49, и **[2]** «Республиканский турнир юных математиков – игра и соревнование, правила и задачи, вопросы и ответы» // «Матэматыка», 2013 г., № 6, с. 39-51).

Она пишется после ряда знаменательных событий, произошедших в истории этих турниров:

- в прошлом учебном году прошел юбилейный XV республиканский турнир и сейчас идет подготовка к очередному XVI турниру (подробные объявления см. в «Настаўніцкай газеце» за 11 сентября 2014 г. и на сайте www.uni.bsu.by;
- 13-19 июля 2014 г. в г. Бремене (Германия) прошел VI международный турнир юных математиков, на котором наша команда вместе с командой Франция-2, завоевала диплом I степени, чем очередной раз подтвердила высокий уровень проведения наших белорусских турниров и качество подготовки наших учащихся в такой сфере как организация и обучение исследовательской деятельности; подчеркнем, что в шести международных турнирах команды Республики Беларусь взяли четыре диплома I степени и два – III степени;
- Во время проведения последнего международного турнира состоялось несколько заседаний Международного организационного комитета, во время которых были уточнены основные положения правил проведения турнира (кстати, взятые в основном из наших белорусских правил) и подготовлена специальная памятка для команд и жюри, которая во многом должна способствовать пониманию как руководителями и членами команд, так и членами жюри многих нюансов подготовки заданий и докладов по ним, стратегии и тактики борьбы во время соревнований, целей и задач всех участников турнира (как команд в соответствии с их ролями, так и членов жюри).

По моему мнению, *такая памятка должна стать сводом (описанием) тех норм, правил и действий, к которым должны стремиться все участники турнира, от непосредственных участников (школьников), до руководителей и членов жюри*. Она необходима всем нынешним и будущим участникам турниров, в том числе национальных турниров в тех странах, где они проходят. И потому опубликование в этом номере всех основных разделов этой памятки вместе с дополнительными комментариями, касающимися специфики проведения турнира у нас в Беларуси, и что особо представляется важным – в преддверии очередного белорусского турнира – является своевременным и целесообразным. Исходя из этого, получился стиль этой статьи (в части 4°) – как перевод, когда нужно почти дословный, но зачастую и достаточно вольный, но учитывающий специфику наших белорусских правил.

Следует отметить еще, что в ряде случаев, в статье представлены мои личные впечатления (комментарии), которые могут не совпадать с мнениями других членов жюри, но их все равно полезно учитывать во время подготовки команды, ибо, во-первых, насколько я знаю, многие члены жюри все-таки согласны с этими комментариями, а, во-вторых, такие комментарии все равно показывают важные моменты, вопросы, направления, в которых можно действовать (работать с командой), и, главное, каждый руководитель или член команды сможет учитывать эти комментарии (полностью или нет по его усмотрению, внося свое понимание в эти вопросы, и будет это делать осмысленно!).

Прежде чем перейти непосредственно к этим разделам напомним, что полный текст правил проведения турнира размещен на сайте www.uni.bsu.by, в разделе «Республиканский турнир юных математиков», а все основные положения правил вместе с ответами на часто возникающие у участников вопросы можно найти в упомянутой выше статье **[2]**). Желательно, конечно, чтобы читатели (а особенно, руководители и члены команд, а также члены жюри) ознакомились и даже имели под рукой эти материалы. На них мы иногда будем ссылаться. А пока небольшое напоминание-разъяснение.

2°. Что такое турнир юных математиков и что такое исследовательское задание

Турнир юных математиков – командные соревнования учащихся в умении решать математические задачи исследовательского характера (*исследовательские задания*, см. ниже), грамотно и убедительно представлять полученные результаты, аргументированно отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях. Он проходит в виде последовательно проводимых *математических боев*, в которых команды по очереди докладывают свои исследования по предложенным заданиям, а также выступают в роли оппонентов для других участников.

Математический бой состоит из нескольких раундов, в каждом из которых обсуждается одна задача, отличная от задач других раундов. В каждом раунде команда-участник исполняет одну из ролей: Докладчика, Оппонента, Рецензента или Наблюдателя. Подробно о содержании этих ролей и обязанностях их исполнителей см. в правилах проведения турнира. Оппонент, Рецензент и Наблюдатели называются оппонирующими командами (участниками).

Исследовательское задание, если говорить коротко, это сложна задача, содержащая части (пункты) с неизвестными решениями. В правилах Международного турнира юных математиков используется общий термин «проблема», по-английски звучит так: «the problems for the ITYM are estimated as difficult, containing parts with no known solution».

Опишем это понятие подробнее с разделением на исследовательские задания и научно-исследовательские задания. Свою точку зрения об этом я выразил в статье «Проблемы и перспективы развития исследовательской работы учащихся: организация, формы и уровни исследовательской деятельности» (см. журнал «Столичное образование», Минск, 2008, № 6, с. 50-56).

Исследовательское задание – это сложная задача (проблема, набор связных задач для исследования), результатом решения которой, вообще говоря, является новое знание: ни решение, ни результат в полном масштабе вначале неизвестны (*автор достаточно четко и с большой степенью уверенности может строить гипотезы, предполагаемые результаты, видеть пути и методы ее решения, но даже автор не может говорить о их гарантированности, пока они не доказаны, обоснованы, проверены, апробированы и т.п.*). ***Научно-исследовательское задание*** отличается от исследовательского тем, что результатом решения такой проблемы является получение нового научного или практического знания (знание, полученное от решения исследовательской задачи не несет в себе, вообще говоря, теоретической или практической ценности, можно сказать, научной ценности в общечеловеческом масштабе).

Если говорить об отличиях исследовательского задания от олимпиадной задачи, то их по крайней мере, два (см. **[2]**). Во-первых, решение олимпиадной задачи полностью известно (оно, как правило, короткое). Решение всех задач (пунктов), входящих в исследовательское задание, как правило, неизвестно даже самому его автору. Во-вторых, олимпиадная задача должна быть решена именно в той постановке, какая предложена для решения. При решении исследовательского задания можно предлагать свои варианты постановки задач, обобщающие, а иногда и упрощающие исходную, если это позволяет получить хорошие результаты.

В соответствии с этим в списке исследовательских заданий турнира, вообще говоря, могут быть задания двух типов (некоторые из заданий нынешнего турнира приведены в конце этой статьи).

1) Полностью элементарные задания (в смысле школьной математики), как в своей формулировке, так и в полном решении, но содержащие части с неизвестными решениями (не обязательно это должны быть очень сложные части, скорее направления, в которых еще не проводились исследования). Это как раз и есть ***исследовательские задания.***

2) Задачи, которые являются введением в какую-то теорию или раздел современной математики. Тем не менее начальные пункты должны быть либо достаточно просты (решаться на уровне определений), либо решаться на основе теоретических сведений, доступных в стандартной литературе (к которой участники наверняка обращаются в процессе подготовки), и лишь последние пункты могут быть более или менее сложными. Такие задачи являются ***исследовательскими заданиями*** с элементами ***научно-исследовательских в последних пунктах,*** и они предлагаются с целью дать школьникам возможность познакомиться и заинтересоваться новыми для них разделами математики.

3°. Цели, задачи и принципы турнира

Целями турниров юных математиков являются привлечение молодежи к науке и научной деятельности, дополнительное образование, обучение методам и привитие навыков научных исследований.

Задачами турниров юных математиков является реализация и обучение основным научным и образовательным компетенциям (знаниям, умениям и навыкам) с использованием основных элементов научного исследования, а именно:

1. умение проводить исследовательскую работу (решать исследовательские задания (проблемы), работать с литературой, Интернетом и др. источниками, грамотно, лаконично и логично, ясно и доходчиво оформить результаты – сделать статью),
2. умение сделать доклад: доходчиво и убедительно представить результаты в устной речи с использованием презентация и других иллюстрирующих или технических средств,
3. умение оценить письменную работу (статью и т.п.),
4. умение грамотно, убедительно и этично вести дискуссию,
5. умение оценить дискуссию,
6. умение дать письменный отзыв (написать рецензию),

> **Примечание.** В частности, умение (раз-)отличить 3 уровня ошибок (если таковые имеются): опечатки и(или) неточные формулировки, несущественные ошибки и существенные ошибки и прокомментировать их, а также дать общую оценку работе, в которой отражено понимание самой работы и ее результатов.

7. умение решать самостоятельно,
8. умение работать в команде,
9. умение проявлять смелость, свое видение и находчивость в проведении исследовательской работы,
10. приобщение учащихся к современным математическим теориям, развитие интереса и поощрение самостоятельного изучения материала серьезного уровня, подготовка на этой основе образовательной и научной базы,
11. воспитание научной этики.

Основные принципы, на которых строятся турниры юных математиков:

- хоть турнир это и соревнование, но во все элементы и мероприятия турнира (туры, математические бои, раунды, жеребьевки и т.п.) изначально закладывается следующий основополагающий принцип – максимально приблизить такое состязание к научной конференции, то есть реальному представлению командами (школами, регионами, странами) уровень дополнительного образования молодежи в старших классах, а также обмен опытом и координация действий в данной сфере,

отсюда:

- **во-первых, принципы, заложенные в сравнение и оценивание разнообразных сторон научной деятельности**, которую тренируют и демонстрируют команды:
  - **в ходе одного математического боя** – это оценка доклада, оценка оппонирования (насколько оппонент разобрался в материалах и докладе докладчика и оценил его работу), оценка рецензирования (насколько рецензент разобрался в дискуссии оппонент-докладчик), оценка письменных отзывов, оценка умения убедительно и в то же время этично вести дискуссию,
  - **по ходу турнира** – учет всех представленных элементов исследования и дискуссии в разных боях, по разным задачам, с разными соперниками и т.п.

- **во-вторых, принципы, заложенные в процедуру жеребьевки** (см. соответствующие пункты правил), обеспечивающие минимальность случайности и максимальную возможность командам проявить себя на своих лучших задачах, а именно:
  - **инициатива в жеребьевке у докладчика** – он выбирает задачу для доклада
  - **докладчик имеет большое число отказов**, что дает возможность выбирать свою лучшую задачу или, по крайней мере, выбирать задачи, исходя из своих стратегических целей.

  Примечания. При этом количество отказов должно оставаться разумным, чтобы оставить элементы интриги и заставить команды реально исследовать достаточное количество задач (по опыту сильных команд – должно быть 3-4 очень хорошо сделанных задач и еще 3-4 сделанных в достаточной мере, чтобы при необходимости можно было делать доклад по ним без боязни явного провала; последнее уже дело за стратегией команды).

  В этом случае мы (**т.е. организаторы и жюри**) реально оцениваем действительную силу команд, а не по случайно попавшим задачам, а **руководители и команды** понимают, что им нужно делать во время домашней подготовки, в частности, исследовать не все задачи по чуть-чуть или выше среднего, а сконцентрироваться на тех задачах, на которых они могут себя проявить (минимум это 6 задач, а лучше 7-8; конечно, важно решать и оставшиеся задачи, ибо знания и умения по ним все равно проявятся, ибо приходится оппонировать и рецензировать другие команды).

4°. «Памятка и советы командам и жюри Международного турнира юных математиков»

(*так можно перевести название документа, который будет рассматриваться и обсуждаться в этой части*)

А. Жюри турнира

Всех членов жюри, которые потенциально в той или иной мере участвуют в оценивании действий команд (порой опосредованно), можно условно разбить на три группы:

1. ЭКСПЕРТЫ, или опытные члены жюри (мы их еще называем «профессиональные» или постоянные члены жюри):
   - Независимые математики, обладающие многолетним опытом участия в турнирах,
   - Члены организационного комитета;
2. ВРЕМЕННЫЕ члены жюри, приглашаемые оргкомитетом:
   - Математики впервые участвующие в турнире (в идеале через несколько лет, они могут стать экспертами),
   - Руководители команд,
   - Гости или наблюдатели, приглашенные на турнир;
3. КОНСУЛЬТАНТЫ или внешние эксперты, не принимающие непосредственного участия в турнире:
   - Авторы исследовательских заданий турнира (те, которые не участвуют в жюри непосредственно),
   - Внешние эксперты.

Авторы заданий и(или) эксперты оформляют основные результаты с краткими решениями (или идеями решений) известных им пунктов и общие комментарии к заданиям до начала турнира. Эти комментарии, в частности, должны включать указания на ожидаемую сложность тех или иных пунктов, основные источники, в которых можно найти решения известных пунктов, а также потенциальные направления обобщений.

Оргкомитет турнира определяет состав жюри для каждого боя (в отборочных турах и в финалах), исходя из следующих основных правил:

- в идеале, не менее половины членов жюри и председатель жюри каждого боя должны быть из первой части (т.е. должны быть опытными (профессиональными) членами жюри),
- по каждому заданию, докладываемому в бое, в составе жюри этого боя должен быть специалист-профессионал в соответствующей области математики (в идеале – автор или эксперт по этой задаче),
- руководители команд не могут быть членами жюри в тех боях, в которых участвуют их команды,
- в составы жюри финальных боев включаются наиболее опытные математики, включая руководителей команд (разумеется, в тех финалах, где не участвуют их команды).

Б. Руководители команд

Руководители команд выполняют две основные миссии: научную и организационную. Как научные руководители они:

- обучают школьников основам математических знаний в тех областях, к которым относятся задания турнира,
- подсказывают направления исследований и консультируют по мере продвижения в этих направлениях (например, подсказывают, на какие более простые подзадачи можно разбить основную задачу, или возможные приемы (методы) доказательств и т.п.),
- помогают найти источники по соответствующим теориям,
- объясняют (консультируют) как подготовить письменные материалы по задаче (другим словами, как написать статью по своим материалам), что и как включить в презентацию, а также как написать письменный отзыв на материалы соперников,
- проверяют письменные материалы и указывают на ошибки в них,
- помогают в изучении и оценивании материалов других команд.

Однако, научные руководители не должны решать задания турнира за своих учащихся. Им также не разрешается помогать своим командам непосредственно во время проведения боев.

В. Письменные материалы (см. также **[2]**)

Вопрос: Нужно ли решать все пункты задачи в точном соответствии с опубликованным условием, либо достаточно решить только самый общий из них?
Безусловно, если решен только самый общий пункт, а решения менее общих достаточно очевидным образом следуют из сделанного, причем это явно отмечено в докладе, жюри будет считать, что решены все пункты. Но не следует забывать и о том, что докладчик должен стремиться сделать свой доклад понятным всем присутствующим. Иногда этого можно добиться только излагая решение, начиная с самых простых случаев.

Вопрос: Можно ли вместо задачи, приведенной в опубликованном списке, решать другую задачу?
Если осторожно, то можно. Команда может, в разумных, конечно, пределах, отклониться от опубликованного условия задания, если такое отклонение позволяет получить нечто осмысленное и интересное: решение более сложной задачи, красивое решение близкой задачи или же, в конце концов, много результатов по более простой задаче. Однако,

- рассматриваемая задача должна быть тесно связана с исходной постановкой,
- из доклада команды должно быть ясно, что команда сделала все возможное для решения исходной задачи.

Определение степени разумности всех этих действий и их оценка – прерогатива жюри.

<u>Г. Роли команд</u> (см. также правила турнира и статью **[2]**)

Г.1. Докладчик

Докладчик должен дать краткое, но ясное и логичное представление результатов, полученных командой при решении исследовательского задания. Хорошее представление, вообще говоря, должно включать

- основные собственные результаты,
- существенные идеи доказательств,
- методы и важные (интересные сточки зрения необычности) технические действия (логические обосновании, цепочки преобразований и(или) оценок и т.п.),
- показательные примеры.

Представление (и презентация) должны быть построены таким образом, чтобы дать ясное и убедительное содержание своей работы по задаче всем участникам дискуссии (в частности, и тем, кто не знакомился с письменными материалами команды заранее). Доклад команды должен полностью соответствовать письменным материалам.

Докладчику следует дать резюме (краткий общий итог) своей работы в начале или в конце своего выступления.

<u>Вопрос</u>: Что делать команде-докладчику при обнаружении ошибок в своих решениях во время непосредственной подготовки к докладу?

Быть честным и отметить их в своем выступлении. Если это просто опечатки или ошибки ***несущественные*** (т.е. такие, которые могли бы быть исправлены очень быстро непосредственно в ходе выступления с докладом, если бы на них указали соперники, и не влияющие на суть дальнейшего изложения), то вы можете указать на них с соответствующими комментариями. Если же ошибки существенные, то вам следует просто указать, в каком месте письменных материалов они находятся и как влияют на дальнейшие результаты. Жюри отметит существенность (или несущественность) ваших ошибок и соответствующим образом выразит это своих оценках. В любом случае жюри проверит, заметили ли команды-оппоненты эти ошибки (для этого, в частности, команды и пишут письменные рецензии (отзывы) на материалы друг друга), а также может использовать такие ситуации во время дискуссии, задавая подходящие вопросы.

<u>Вопрос</u>: Какие вопросы могут быть по теории и как на них отвечать?

Все команды и члены жюри естественно могут (и будут) задавать вопросы – прямые или косвенные – докладчику или друг другу (другим командам) не только по сути результатов докладчика и их обоснованиям, но и по теоретическим сведениям, использованным докладчиком, особенно, если эти сведения выходят за рамки школьной программы. Зачастую это помогает определить, насколько докладчик понимает суть рассматриваемых вопросов, а не просто воспользовался решением руководителя и т.п. Здесь возможны две основные ситуации:

- если результаты докладчика напрямую основаны на конкретных утверждениях, методах и/или идеях, заложенных в доказательствах известных теорем, то докладчик должен ориентироваться в таких теоретических сведениях и уметь отвечать на такие вопросы,
- если же вопросы, поступившие участникам дискуссии, не связаны с решением докладчика, а касаются соответствующей теории или находятся в связанных с ней разделах (но напрямую не использовались докладчиком), то любому участнику дискуссии уместно ответить на такие вопросы примерно так: «мы ***на это*** не опирались и никак не использовали, а заданные вопросы выходят за рамки наших программ и знаний, и мы пока их не изучали».

Г.2. Оппонент

Оппонент анализирует решение и представление Докладчика, указывая как на ошибки и неточности в его работе, так и на ее достоинства. Одной из основных целей Оппонента инициировать содержательную и плодотворную дискуссию. Оппонент может задавать вопросы Докладчику (и ему следует это делать) в следующих ситуациях (например):

- Оппонент не понял некоторые пункты (абзацы) в письменных материалах и хочет прояснить их для себя,
- Оппонент нашел ошибки в решении и хочет выяснить, как они влияют на работу в целом и возможно ли их быстро исправить, не меняя сути дальнейшего изложения,
- некоторые доказательства очень трудны, и Оппонент хотел бы понять, может ли Докладчик объяснить их более простым языком (может даже своими словами объяснить идеи и сложные моменты, опуская громоздкие детали),
- в решение используются сложные разделы математики (вне школьной программы) и Оппонент хотел бы проверить понимает ли Докладчик используемые факты.

Результаты Докладчика должны оцениваться по следующей примерной шкале:
- Верный и доказанный результат,
- Верный результат с несущественными ошибками в доказательстве,
- Верный, но недоказанный результат (доказательство отсутствует или в нем есть серьезные ошибки),
- Сомнительный результат,
- Неверный результат.

Хорошее выступление Оппонента может быть примерно таким:
- начните с целесообразных и интересных вопросов,
- обязательно включите в свое выступление оценку работы Докладчика, указав как на слабые, так и на сильные стороны решения (письменных материалов) и доклада,
- не превращайте дискуссию в объяснение своих собственных результатов,
- будьте вежливы и уважительны к сопернику.

<u>Вопрос</u>: Что делать в случае, если Оппонент не нашел ошибок в работе Докладчика?
- попытайтесь все-таки придумать интересные вопросы, основанные на материалах Докладчика,
- оцените новину и существенность результатов Докладчика и перспективность дальнейших исследований (особенно это важно в контексте всего задания, например, Докладчик решил всего половину пунктов, но реально эти пункты являются сложными, интересными, новыми и т.п.),
- оцените возможность улучшить и(или) развить результаты Докладчика, особенно, если вам представляется такое улучшение достаточно естественным и несложным, а также оцените возможность применить эти результаты в других связанных задачах (в частности, об этом тоже можно спросить Докладчика),
- дайте общую оценку выступления Докладчика.

Г.3. Рецензент

Рецензент играет роль судьи в дискуссии между Докладчиком и Оппонентом.
Для хорошего выступления Рецензенту нужно:
- подвести итог дискуссии,
- оценить выступление Оппонента (см. роль Оппонента), его корректность и объективность,
- оценить ответы Докладчика,
- при необходимости задать вопросы обеим сторонам для того, чтобы прояснить необходимые детали дискуссии,
- высказать свое мнение по тем вопросам, в которых стороны придерживаются различных точек зрения,
- указать на те важные моменты, которые пропустил Оппонент и выяснить понимает ли их Оппонент,
- не превращать дискуссию в объяснение своих собственных результатов,
- быть вежливым и уважительным к соперникам.

<u>Вопрос</u>: Что делать в случае, если Оппонент выполнил свою работу и нашел все ошибки в письменных материалах Докладчика?

- Помните, что ваша главная цель – оценить дискуссию между Оппонентом и Докладчиком,
- Кроме этого помните, что вы сдали в жюри письменный отзыв на материалы Докладчика, если в отзыве указаны все основные моменты доклада (существенные и несущественные ошибки, другие недостатки, а также отмечены достоинства), не надо бояться кратко сказать об этом.

<u>Вопрос</u>: Могут ли Оппонент и Рецензент говорить о своих собственных результатах? Об этом ясно сказано в правилах проведения турнира (см. сайт www.uni.bsu.by): Оппонент и Рецензент в своих основных выступлениях не представляют собственных результатов по обсуждаемой задаче, за исключением тех случаев, когда это служит аргументом в полемике (например, если по представленным материалам трудно судить о достоверности доказательств, а собственные результаты противоречат утверждениям Докладчика). Собственные идеи и результаты могут быть кратко описаны в заключительных выступлениях Оппонента, Рецензента, а также в выступлениях Наблюдателей. Жюри не обязано учитывать количество и качество результатов, полученных Оппонентом, Рецензентом и Наблюдателями по данной задаче, при выставлении окончательных оценок командам.

Г.4. Наблюдатель

<u>Вопрос</u>: Как жюри оценивает выступления наблюдателей? Жюри боя должно очень строго относится к оценке выступлений наблюдателей, не позволяя им собирать дармовые баллы за пустопорожние выступления. Только очень существенное замечание наблюдателя должно получать положительную оценку. В противном случае оценка должна быть нулевой или даже отрицательной: несущественные выступления наблюдателей должны четко отсекаться оценками –1 в начале боя и даже –2 или –3, если такие несущественные выступления настойчиво повторяются или носят явно умышленный характер «охоты за дополнительными баллами», но по существу не несут новой информации.

В идеале выступление наблюдателя должно иметь примерно такой вид:

«*Уважаемые участники дискуссии и члены жюри! Мы хотели бы указать на такие существенные недостатки в докладе (и работе) докладчика как* ... (далее перечисляются конкретные и серьезные(!) ошибки в доказательствах, формулировках, примерах и проч. Докладчика, обычно их немного – одна-две-три, главное, что это действительно существенные недостатки, ср. разделение недостатков в работе докладчика на опечатки, существенные и несущественные ошибки). *К сожалению (*или, *нам показалось странным, что) ни оппонент, ни рецензент никак не упомянули эти ошибки*.»

При необходимости можно быстро продемонстрировать конкретный контрпример или конкретную серьезную ошибку в логической или аналитической цепочке рассуждений (желательно заранее подготовленный(е) на слайде или на плакате).

И все, не более того! Только конкретные замечания, никаких двусмысленных или гипотетических рассуждений. В крайнем случае, можно попросить у жюри разрешения дать какой-то из команд-участниц дискуссии возможность прокомментировать упомянутый(е) факт(ы), либо попросить жюри самих выяснить это у Докладчика или у других команд.

<u>Е. Регламент действий в бое и оценивание команд</u>

Эта часть подробно представлена в правилах проведения турнира и нет смысла здесь дополнительно ее комментировать, тем более, что к моменту подачи официальных заявок в некоторые из этих правил могут внесены изменения и тогда команды получат соответствующие сообщения.

5°. Избранные исследовательские задания XVI республиканского турнира юных математиков

Примечания. 1) Полностью тексты исследовательских заданий представлены в электронном виде на сайте **http://www.uni.bsu.by**, а также опубликованы в «Настаўніцкай газеце» 11 сентября 2014 г.

2) В случае обнаружения опечаток, двусмысленностей и других неточностей, а также в случае возникновения вопросов по условиям просим обращаться по адресу zadvorny@bsu.by или по телефону +375-29-657-88-08 (другие адреса и телефоны см. в объявлении о турнире).

3) Обращаем ваше **ВНИМАНИЕ** на то, что предлагаемые задания (далее – задачи) носят исследовательский характер, наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- необходимо по возможности максимально полно исследовать каждую задачу, но в то же время нужно иметь в виду, что в ряде задач интерес представляют даже *отдельные частные случаи задач (или их пунктов)*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) вы *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно рассмотреть свои направления*, причем ваши исследования необязательно должны совпадать с предложениями авторов;
- **ИССЛЕДОВАНИЕ ПО КАЖДОЙ ЗАДАЧЕ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО** в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде **в двух экземплярах**, при этом:
  - оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором нужно указать номер задачи и ее название, название учреждения образования, название команды (если команда является сборной двух или нескольких учреждений), город, автора(ов) исследования (решения);
  - **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ СОБСТВЕННЫЕ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);
  - **ОБЯЗАТЕЛЬНО** дайте четкие ссылки на литературу и другие источники, которые вы использовали при проведении исследований (в месте их использования)

№ 2. Слова

Алфавит племени Тумба-Юмба состоит из двух букв: a и b. Два слова называются одинаковыми, если из одного слова можно получить второе слово, используя правила:

а) В любое место слова можно вставить последовательность $aaaa$ или последовательность bb. Аналогично из любого слова можно удалить последовательности $aaaa$ или bb.

б) Последовательность bab можно заменить на последовательность aaa и наоборот.

Пустое слово, которое будем обозначать $\varnothing$, также присутствует в языке. В данном случае по определению оно равно $aaaa$, а также bb. Первое правило кратко будем записывать как $a^4 = b^2 = \varnothing$, а второе — как $bab = a^3$. Пусть x – слово. Через x^0 будем обозначать пустое слово.

1. Докажите, что слова $abaab$ и aaa равны.
2. Докажите, что слова $abbabbbaaabb$ и $abababbaabb$ различны.
3. Попробуйте найти (описать) множество всех слов, равных: а) $\varnothing$, б) a, в) b.
4. Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из трех букв? Сколько существует различных слов, состоящих не более чем из четырех букв? Сколько вообще существует различных слов?

Исследуйте аналогичные вопросы в случае, если действуют следующие правила:

5. $a^n = b^2 = \varnothing$, $bab = a^{n-1}$ (Рассмотрите этот вопрос хотя бы для некоторых $n \in \boldsymbol{N}$.)
6. $a^3 = b^2 = \varnothing$, $ab = baa$.
7. $a^5 = b^3 = \varnothing$, $(ab)^2 = \varnothing$.
8. $a^2 = a$, $b^2 = b$, $abab = ab$.
9. Найдите как можно больше $m, n, p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ таких, что при следующих правилах $a^m = \varnothing$, $b^n = \varnothing$, $(ab)^p = \varnothing$ будет бесконечно много слов (одно слово).
10. Найдите или оцените количество слов (если их конечное число) при заданных $m, n, p \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ и при следующих правилах $a^m = \varnothing$, $b^n = \varnothing$, $(ab)^p = \varnothing$.
11. Предложите свои обобщения или направления в этой задаче и исследуйте их.

№ 3. «Пузатость» прямоугольников

Начальная постановка. Назовем «*пузатостью*» прямоугольника и обозначим через π отношение длины его меньшей стороны к длине большей стороны (например, пузатость квадрата равна 1).

1.1.Разрежем квадрат произвольным образом на четыре прямоугольника двумя перпендикулярными прямыми, параллельными его сторонам. Докажите, что сумма пузатостей четырех полученных прямоугольников не меньше единицы.

1.2. Какое наименьшее и наибольшее значение может принимать сумма пузатостей этих прямоугольников?

Будем в дальнейшем обозначать *сумму пузатостей* всех прямоугольников, получаемых при разрезании исходного квадрата (или прямоугольника), через σ.

1.3. Аналогично пункту 1.1 проведем m прямых, параллельных сторонам квадрата. На какое число прямоугольников они могут разрезать квадрат? Найдите максимально возможную и минимально возможную суммарную пузатость σ всех полученных прямоугольников. Укажите точные значения или хотя бы их оценки; в случае точных значений предложите примеры, на которых они достигаются.

Общая постановка. Исследуйте аналогичные вопросы для прямоугольников со сторонами длиной a и b. Для определенности здесь и далее будем считать, что сторона длиной a горизонтальна, будем также обозначать такие прямоугольники $\Pi_0 = \Pi(a, b)$. Аналогично пункту 1.2 проведем m прямых, параллельных сторонам прямоугольника. Покажите, что суммарная пузатость всех полученных прямоугольников не меньше пузатости $\pi(\Pi_0)$ исходного прямоугольника. Найдите максимально возможную и минимально возможную суммарную пузатость всех полученных прямоугольников (возможно, в зависимости от количества вертикальных и горизонтальных прямых). Укажите примеры, на которых эти значения достигаются.

Важные частные случаи.

2.1. Пусть для начала все m прямых параллельны стороне b прямоугольника Π_0 (т.е. все прямые вертикальны). Найдите максимально возможную и минимально возможную суммарную пузатость всех полученных прямоугольников в этом случае. Укажите точное значение или хотя бы оценку, и в случае точных значений предложите примеры, на которых они достигаются.

2.2. Для каких значений k вы сможете найти такое расположение m прямых, чтобы они разрезали прямоугольник на меньшие прямоугольники, сумма пузатостей которых была бы равна k?

2.3. Те же вопросы, что и в пунктах 2.1 и 2.2, но среди $m + 1$ прямоугольников ровно l таких, у которых горизонтальные стороны x_j, $j = 1,2, \ldots, l$, не меньше b.

2.4. Те же вопросы, что и в пунктах 2.1 – 2.3, но кроме m вертикальных прямых проведены еще одна, две, …, n горизонтальных прямых, делящих сторону b, на две, три, …, $n + 1$ части.

Возможные обобщения. По аналогии с пузатостью прямоугольника попробуйте ввести понятие пузатости для других выпуклых фигур на плоскости (треугольника, параллелограмма и т.п.), а также в пространстве и исследуйте их свойства. Предложите свои направления в этой задаче и изучите их.

№ 4. Обходительные многоугольники

Выпуклый многоугольник назовем обходительным, если на каждой его стороне и диагонали можно выбрать направление (одно из двух возможных) так, что сумма полученных векторов равна нулю.

0) Приведите пример обходительного четырёхугольника.
1) Может ли n-угольник не быть обходительным, если n нечетно?
2) Для каких n существуют необходительные n-угольники?
3) Опишите все обходительные четырехугольники.

4) Все ли правильные многоугольники обходительны?
5) Опишите все (или как можно больше) необходительные шестиугольники.
6) Приведите критерий обходительности n-угольника.
7) Рассмотрите пункты, аналогичные пунктам 1-6 в пространстве (т.е. замените многоугольник многогранником).
8) Предложите свои обобщения и направления в этой задаче и исследуйте их.

№ 6. Дороги, которые выбирает мэр

В городе Н-ске $N + M$ улиц: N улиц идут строго с запада на восток, M улиц идут строго с севера на юг (по всем улицам движение разрешено в обе стороны). Все горизонтальные улицы пересекаются со всеми вертикальными, образуя таким образом $N \times M$ перекрёстков. (Для краткости будем говорить, что город имеет размеры N на M).

Новый мэр пообещал осуществить обновление улиц города путем их асфальтирования в соответствии с новыми технологиями. Однако мэр не хочет, чтобы в городе появился замкнутый маршрут, проходящий только по вновь асфальтированным перекрёсткам, потому что тогда автомобилисты смогут ездить слишком быстро, что может повлечь за собой много ДТП. Поэтому главному архитектору поставлена задача: каждый месяц асфальтировать ровно один перекрёсток, а если соседний перекресток по какой-то улице уже был заасфальтирован ранее, то дорога между этими двумя перекрестками тоже асфальтируется в этом месяце (если таких перекрестков несколько, то асфальтируются все такие дороги).

Какое наибольшее число месяцев архитектор города может асфальтировать каждый месяц новый перекрёсток с прилежащими дорогами, не создав в городе ни одного асфальтированного замкнутого маршрута?

1. Решите задачу для города размерами 2 на 2, 2 на 3, 3 на 3, 3 на 4.
2. Решите задачу для города размерами 2 на M, т. е. дайте оценку и приведите алгоритм построения заасфальтированной сети дорог, в которой она достигается.
3. Решите задачу для города размерами 3 на M.
4. Решите задачу или дайте как можно более точную оценку для города размерами 4 на M, 5 на M, 6 на M.
5. Решите задачу или дайте верхнюю и нижнюю оценки для города размерами N на M, а также исследуйте точность (достижимость) Ваших оценок.
6. Введём прямоугольную систему координат с началом в левом нижнем углу прямоугольного города N на M и осями вдоль сторон этого прямоугольника. Рассматривая различные подмножества улиц этого города, можно получать города с формой, отличной от прямоугольной. Например, решите задачу для города

   6.1. в форме буквы L (выбираем K улиц, ближайших к левой стороне прямоугольника и параллельных ей, и K улиц, ближайших к нижней стороне прямоугольника и параллельных ей),

   6.2. в форме «бублика» (выбираем K улиц, ближайших к каждой стороне прямоугольника и параллельных выбранной стороне) и т. д.

   Для простоты можно начать рассмотрение с K = 2, 3, …
7. Решите пункты 1-6, если запрещено создавать не произвольный замкнутый маршрут, а маршрут в форме прямоугольника (со сторонами с севера на юг и с запада на восток)

№ 7. Делимость подмножеств

I. Введем в рассмотрение функцию от двух аргументов $M : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}_0$ ($\mathrm{N}_0 = N \cup \{0\}$) такую, что $M(k,l)$ равно такому минимальному натуральному числу m, что в любом m-элементном множестве целых чисел всегда найдется k различных чисел, что их сумма будет делиться на l. Если же такого минимального m не существует (т.е. какое бы m не выбрали, всегда найдется такое m-элементное множество целых чисел, что никакие k его элементов в сумме не дают число, делящееся на l), то $M(k,l)=0$.

Примеры: $M(1,2)=0$, другими словами, для любого натурального m существует m-элементное множество, например, состоящее только из нечетных чисел так, что никакой его элемент не делится на 2;

$M(2,3)=0$, другими словами, для любого натурального m можно выбрать m-элементное множество такое, что никакие два его элемента не дают сумму, делящуюся на 3, например, множество, состоящее из чисел, дающих остаток 1 при делении на 3;

$M(3,3)=5$, другими словами, из любого 5-элементного множества целых чисел всегда можно выбрать три числа, сумма которых делится на 3 (докажите это); в то же время из любого меньшего множества, например, 4-элементного, такого, вообще говоря сделать нельзя, пример – множество $\{0, 1, 3, 4\}$.

Вопросы для исследования:

1) Найдите все натуральные l, для которых $M(1,l)>0$.
2) Найдите критерии выполнения неравенства $M(k,l)>0$ или хотя бы необходимые или достаточные условия (с обоснованием).
3) Для фиксированного натурального l обозначим $K_l=\{k\in \mathrm{N} | M(k,l)>0\}$ – множество таких k, что $M(k,l)>0$. Исследуйте монотонность функции $M(k,l)$ по первому аргументу при $k\in K_l$.
4) Докажите, что для любого $n\in \mathrm{N}: M(2^n,2^n)\le 2^{n+1}$. Является ли данная оценка достижимой? Если нет, то попробуйте ее улучшить.
5) Докажите, что для любого $n\in N:\ M(n,n)\le 2n-1$. При каких n достигается равенство?
6) Найдите точное значение для $M(k,l)$ хотя бы для небольших значений k и l ($k,l\le 10$). Если, в общем случае, найти выражение для $M(k,l)$ не удастся, то оцените значение функции $M(k,l)$ сверху и снизу.

II. Рассмотрим функцию от двух аргументов $\tilde{M}:\mathrm{N}\times\mathrm{N}\to\mathrm{N}_0$, $\tilde{M}(k,l)$ равно такому минимальному натуральному числу m, что в любом m-элементном множестве целых чисел всегда найдется k различных чисел, что некоторая их линейная комбинация с коэффициентами 1 или -1 будет делиться на l (т.е. часть слагаемых берется с множителем 1, часть – с множителем -1, и такая сумма делится на l). Если же такого минимального m не существует, то $\tilde{M}(k,l)=0$.

Для функции $\tilde{M}(k,l)$ исследуйте вопросы, аналогичные части **I.**

III. Пусть задано натуральное число $l\in\mathrm{N}$. Обозначим $A\subseteq\{1,2,\ldots,l-1\}$. Рассмотрим функцию $M_A(k,l)$, равную такому минимальному натуральному числу m, что в любом m-элементном множестве целых чисел B всегда найдется k различных чисел $x_1,x_2,\ldots,x_k\ (x_i\in B, x_i\ne x_j, i\ne j)$ и k коэффициентов $\alpha_i\in A$, что $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$ делится на l. В частности, для функции $\tilde{M}(k,l)$ из части **II** этой задачи коэффициенты α_i выбираются из множества $\{1, l-1\}$.

Исследуйте вопросы, аналогичные части **I,** хотя бы для некоторых l и множеств A.

7) Найдите все (или хотя бы некоторые) пары чисел k и l, если такие существуют, что для любого $A\subseteq\{1,2,\ldots,l-1\}$ выполняется $M_A(k,l)=0$.

IV. Предложите свои направления и обобщения задачи и исследуйте их.

№ 10. Количество треугольников и не только!

Исходная постановка. 1.1. На каждой стороне треугольника ABC отмечено по 9 точек, разбивающих эти стороны на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках, взятых по одной на каждой стороне. Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна сторонам исходного треугольника?

1.2. Та же задача, что и в пункте 1, но на каждой стороне взято по n точек.

1.3. Та же задача, что и в пункте 1, но на двух сторонах взято по n точек, а на третьей стороне m точек.

1.4. Та же задача, что и в пункте 1, но на трех сторонах треугольника взято n, m и k точек соответственно.

Общая постановка. Предложите свои направления или обобщения в этой задаче и исследуйте их (возможно, например, исследовать подобные задачи для квадратов или параллелограммов, а также для некоторых видов многогранников в пространстве). В каждом пункте (или в обобщениях) интересно рассмотреть случаи даже небольших значений параметров. Например:

2.1. На каждой стороне выпуклого четырехугольника отмечено по 9 точек, разбивающих эти стороны на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные четырехугольники с вершинами в отмеченных точках, взятых по одной на каждой стороне. Сколько среди этих четырехугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна диагоналям исходного четырехугольника?

2.2. Сколько четырехугольников, у которых только одна сторона параллельна какой-нибудь диагонали? А сколько четырехугольников, у которых две стороны параллельны диагоналям? Три стороны параллельны диагоналям?

2.3. Исследуйте случаи, аналогичные пунктам 1.2 – 1.4.

3. Рассмотрите задачи, аналогичные задачам пунктов 2.1 – 2.3, для правильного пятиугольника.

№ 11. Треугольники в графах

Обыкновенным графом называется пара $G=(V,E)$, где V – некоторое непустое конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E – его *ребрами*. Множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$, множество ребер – $E(G)$, число вершин – $n(G)$, которое также называется порядком графа, число ребер – $m(G)$. Говорят, что две вершины u и v графа *смежны*, если множество $\{u, v\}$ является ребром и *не смежны* в противном случае. Множество вершин, смежных с заданной вершиной, называется *окружением* этой вершины. *Дополнением* (*дополнительным графом*) к графу $G=(V,E)$ называется граф $\overline{G}$, у которого множество вершин то же, что у G, и две различные вершины смежны в графе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они несмежны в графе G. Тройка $\{u, v, w\}$ вершин графа называется *треугольником*, если неупорядоченные пары $\{u, v\}$, $\{u, w\}$, $\{v, w\}$ являются ребрами этого графа. Обозначим через $t(G)$ число треугольников в графе G.

<u>Начальные задачи.</u>

1) Найдите число $t(G)$ треугольников в полном графе G с n вершинами.

2) Пусть граф G содержит n вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, причем пара $\{v_i, v_j\} \in E$ тогда только тогда, когда, $|i-j| \neq 1$ или $|i-j| \neq n-1$ (геометрически этот граф можно представить как выпуклый многоугольник, в котором проведены все диагонали, а все стороны стерты). Найдите число $t(G)$ треугольников в таком графе.

3) Найдите число $t(G)$ треугольников в полном двудольном графе G, доли которого содержат m_1 и m_2 вершин соответственно, а также найдите число $t(\overline{G})$ треугольников в дополнении к такому графу.

4) Те же вопросы, что и в пункте 3) для трехдольного графа, четырехдольного графа и т.п.

<u>Сложные задачи.</u>

5) Проверьте, что для графов из пп. 1) – 4) и их дополнений имеет место следующая формула

$$t(G)+t(\overline{G})=C_n^3-m(n-2)+\sum_{x\in V(G)}C_{\deg x}^2\,, \tag{1}$$

где $n=n(G)$, $m=m(G)$ и $\deg x$ – степень вершины *x* в графе *G*, т. е. число вершин графа *G*, смежных с вершиной *x*.

6) Докажите формулу (1) в общем случае.

7) Используя формулу (1), попытайтесь найти достижимую нижнюю оценку на величину $t(G)+t(\overline{G})$ в терминах числа $n=n(G)$ вершин графа *G*. Приведите примеры графов, подтверждающих достижимость найденной оценки.

8) Предложите свои направления и обобщения этой задачи и исследуйте их.

<u>Возможные направления.</u>

9) Пусть *G* – кубический граф, т. е. степень каждой его вершины равна 3, который является графом пересечений ребер некоторого другого графа *H*. Другими словами, $V(G)=E(H)$ и две вершины в графе *G* смежны в том и только в том случае, если соответствующие им ребра в графе *H* имеют общую вершину. Попытайтесь найти точное значение параметра $t(\overline{G})$ в терминах числа $n=n(G)$ вершин графа *G* или получите оценки этого параметра.

10) Пусть *P* – класс графов. Граф *G* назовем *локально P-графом*, если для любой его вершины подграф, порожденный окружением этой вершины, принадлежит классу *P*. (*Подграф, порожденный окружением некоторой вершины v, – это граф, вершинами которого являются все вершины из окружения вершины v, а ребрами – все ребра исходного графа, соединяющие вершины, принадлежащие окружению вершины v*).

Обозначим через *Local*(*P*) класс всех локально *P*-графов и введем в рассмотрение следующие параметры:

$$t_{\min}(P,n)=\min\{\,t(G)\,:\,G\in Local(P),\ n=n(G)\}\,,$$
$$t_{\max}(P,n)=\max\{\,t(G)\,:\,G\in Local(P),\ n=n(G)\}\,.$$

Для различных классов *P* найдите точные значения параметров $t_{\min}(P,n)$ и $t_{\max}(P,n)$ или предложите оценки этих параметров. В качестве классов *P* можно рассмотреть следующие классы графов: простые циклы, простые цепи, деревья, ациклические графы, двудольные графы, граф *r*-мерного булева куба, *k*-регулярные графы ($k\ge 1$), связные графы, несвязные графы, гамильтоновы графы, планарные графы или любые другие известные классы графов. Используя результаты проведенного исследования, установите необходимые условия существования локально *P*-графов. В частности, докажите следующие утверждения: 1) не существует локально *k*-регулярного графа с *m* ребрами в случае, когда оба параметра *k* и *m* не делятся на 3; 2) если для заданного графа *H* граф *G* является локально *H*-графом и *m*(*H*) не делится на 3, то *n*(*G*) делится на 3.