Задача 10. (локальная схожесть графов)

Сборная Лицея БГУ-10 и гимназии № 1 г. Минска

Автор: Шатило Анатолий, Лицей БГУ.

Резюме. В задаче полностью решены пункты 0.0-2.0, 4 (кроме двух H графов); в пункте 3 рассмотрен вопрос о локальной схожести дополнений и приведены рассуждения о локальной схожести меньших порядков; в пункте 5 дана оценка значений $\xi(k)$ и $\psi(k)$.

В пункте 4 для каждого H графа порядка меньше 6 приведена пара локально-H-совершенных неизоморфных графов, либо доказано, что такой пары нет нет.

XVIII РТЮМ

Декабрь 2016, Минск

В задаче рассматриваются простые графы и используются общепринятые понятия теории графов (см., например [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.]).

Граф с n вершинами называется *помеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два помеченных графа считаются равными, если множества вершин и рёбер у них совпадают. Два графа называются *изоморфными*, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором графе и наоборот. Изоморфные графы естественно отождествлять, т. е. считать совпадающими, и говорить о них как об *абстрактном графе*. Можно также считать, что абстрактный граф получается из помеченного графа опусканием пометок.

Подграф H графа G называется *подграфом, порожденным множеством вершин* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит только вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все рёбра графа G, соединяющие эти вершины. Для графа G и целого числа $k \geq 1$ обозначим через $N_k(G)$ мультимножество, в котором каждой вершине v графа G соответствует подграф графа, порождённых всеми вершинами на расстоянии не более k от v (считаем, что любая вершина графа отстоит от самой себя на расстояние 0). В качестве примера рассмотрим граф G на рис. 1. Для удобства вершины графа помечены, но сам он мыслится как абстрактный. Соответствующие мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$ имеют вид, представленный на рис. 2.

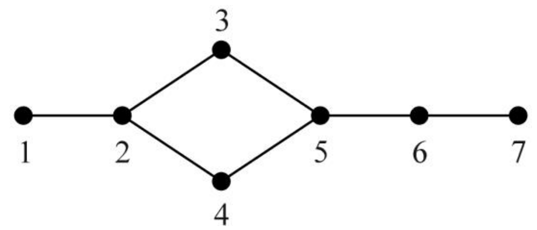


Рис. 1 к задаче № 10. Граф G

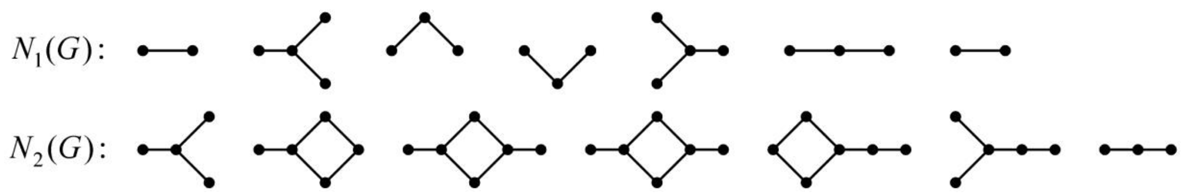


Рис. 2 к задаче № 10. Мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$

Для целого числа $k \geq 1$ назовём два абстрактных графа G и H *локально-k равными*, если совпадают мультимножества $N_k(G)$ и $N_k(H)$. *Локально*-0 *равными* назовём графы, у которых совпадают степенные последовательности. Два локально-k равных для целого неотрицательного числа k графа назовём *локально схожими порядка* k (или просто *локально схожими*). Если все подграфы из $N_k(G)$ попарно изоморфны одному и тому же графу H, то граф G назовём *локально-k-H совершенным*.

Исследуйте следующие задачи.

0.0. Верно ли, что два графа изоморфны, если совпадают их степенные последовательности?

0.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа.

0.2. Перечислите все попарно неизоморфные графы с числом вершин меньше 6 и исследуйте их на локальную схожесть. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3, 3) и обоснуйте, что других таких графов нет.

1.0. Верно ли, что из локально-1 равенства следует изоморфизм графов? Верно ли, что из локально-1 равенства следует локально-0 равенство?

1.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа. Приведите ответ на этот вопрос при условии, что рассматриваемые графы являются связными.

1.2. Пусть G_1 и G_2 – два локально-1-H совершенных графа с одинаковым числом вершин. Следует ли отсюда изоморфизм графов G_1 и G_2? Найдите граф H с наименьшим числом вершин, для которого существуют два локально-1-H совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин.

2. Верно ли, что для какого-либо целого неотрицательного числа k из локально-k равенства графов следует их изоморфизм? Приведите соответствующие контрпримеры. Исследуйте этот же вопрос в классе связных графов.

3. Верно ли, что из локальной схожести какого-либо порядка следует локальная схожесть меньших порядков? Верно ли, что если два графа локально схожи, то локально схожи и их дополнения?

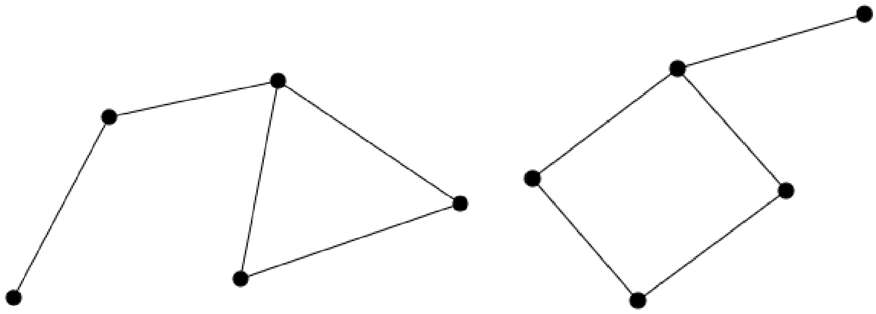
4. Попробуйте найти все графы H с числом вершин меньше 7, для которых существуют локально-1-H совершенные графы.

5. Пусть $\xi(k)$ – наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-k равных неизоморфных графа; $\psi(k)$ – то же для связных графов. Найдите значения ξ и ψ для некоторых k. Попытайтесь оценить величины ξ и ψ и исследуйте точность своих оценок.

Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

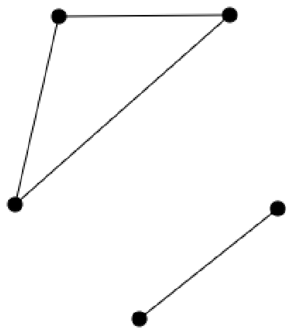
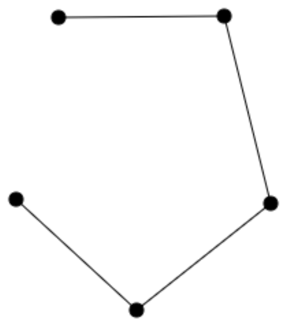
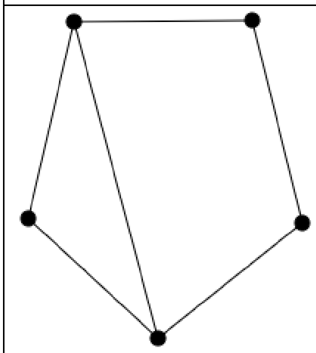
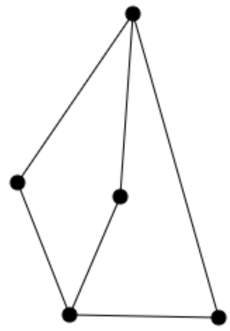
0.0. *Ответ: Нет.* Пример двух неизоморфных графов, степенные последовательности которых совпадают, приведён в пункте 0.1.

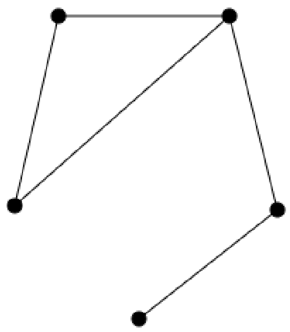
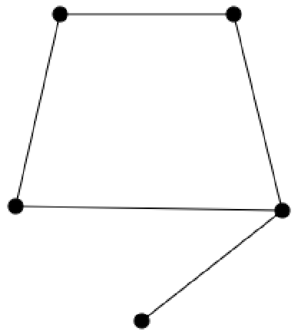
0.1 . Пример графов порядка 5, являющихся локально-0 равными и неизоморфными (степенные последовательности данных графов равны (1,2,2,2,3), но графы не являются изоморфными):



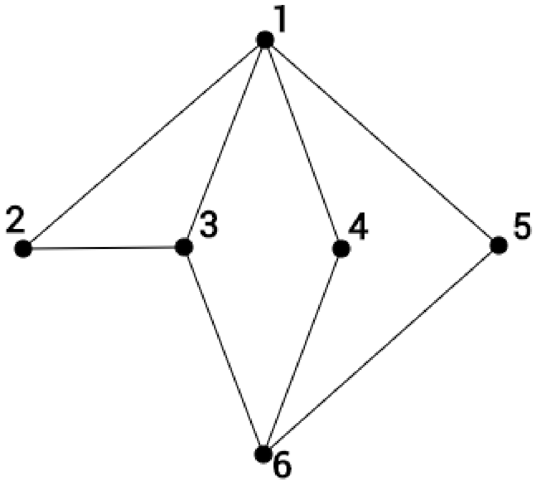
Как показал перебор п. 0.2., минимальный порядок двух локально-0 равных неизоморфных графов равен 5.

0.2. Полный перебор графов приведён в дополнении к работе. Это сделано с целью облегчения чтения работы.
При переборе найдено 3 пары локально-0 равных неизоморфных графов:

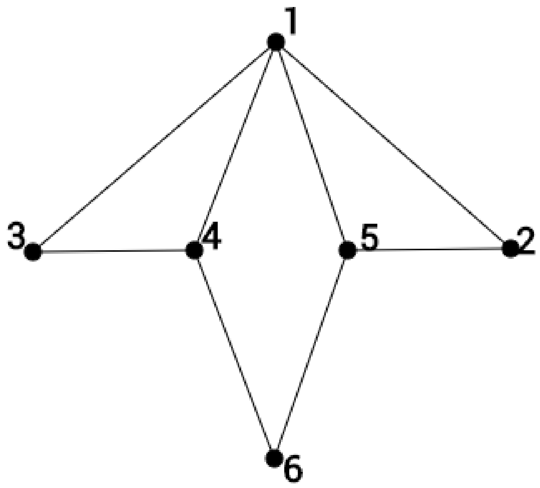
	**(1;1;2;2;2)**		**(1;1;2;2;2)**
	**(2;2;2;3;3)**		**(2;2;2;3;3)**

	**(1;2;2;2;3)**		**(1;2;2;2;3)**

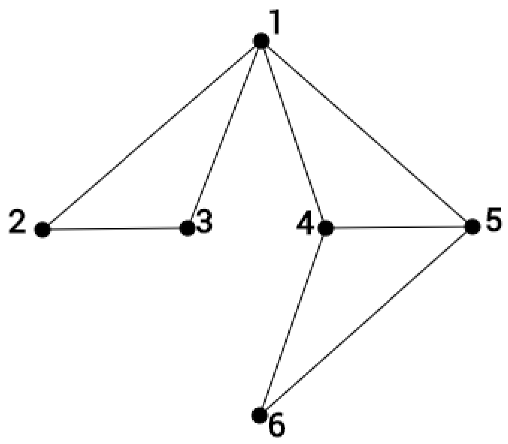
а) (2, 2, 3, 3, 3, 4)
Зафиксируем вершину степени 4 и назовём её **1**. Пусть вершина, не смежная с **1**, будет иметь номер **6**.
1) Если вершина **6** имеет степень 3, то граф задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



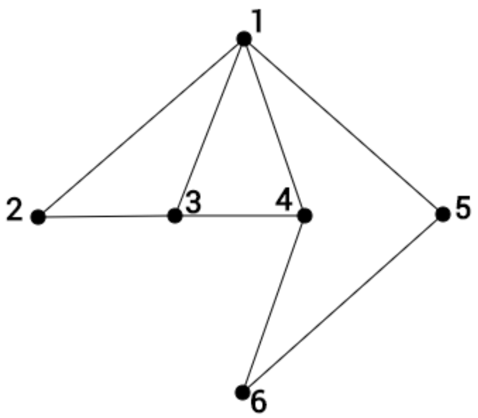
2) Если вершина **6** имеет степень 2, вершины, смежные с **6**, несмежны и вершины, не смежные с **6**, несмежны, то граф также задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



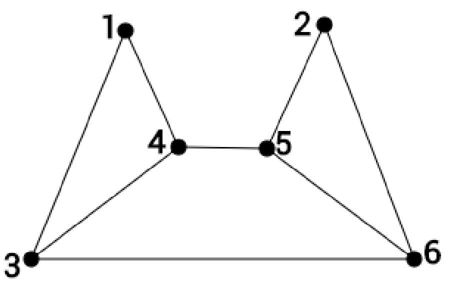
3) Если вершина **6** имеет степень 2 и вершины, смежные с **6**, смежны, то граф также задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



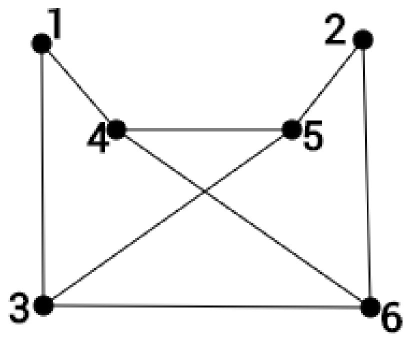
4) Если вершина 6 имеет степень 2, вершины, смежные с 6, несмежны и вершины, не смежные с 6, смежны, то граф также задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



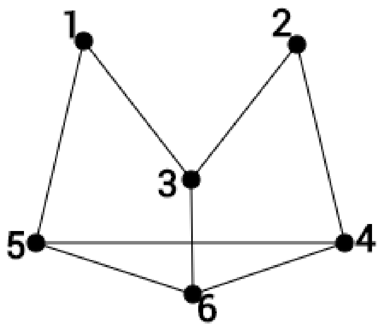
б) (2, 2, 3, 3, 3, 3)
Зафиксируем вершины степени 2 и назовём их **1** и **2**.
1) Если вершины степени 2 несмежны, все рёбра, выходящие из этих вершин, ведут к разным вершинам и вершины степени 3 образуют два треугольных графа с вершинами **1** и **2**, то граф задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



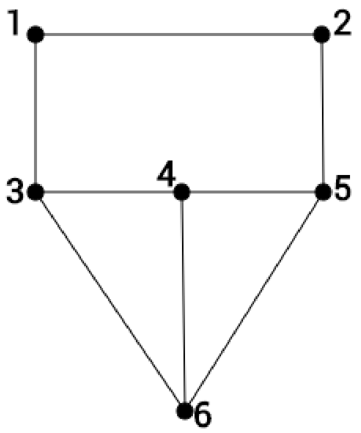
2) Если вершины степени 2 несмежны, все рёбра, выходящие из этих вершин, ведут к разным вершинам и вершины степени 3 не образуют два треугольных графа с вершинами **1** и **2**, то такой граф задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



3) Если вершины степени 2 несмежны и они смежны с одной общей вершиной, то граф задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



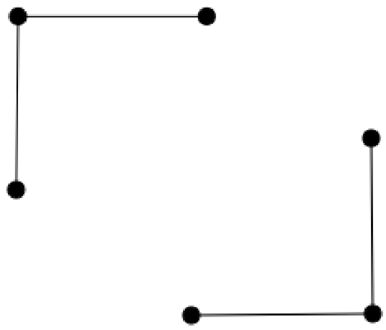
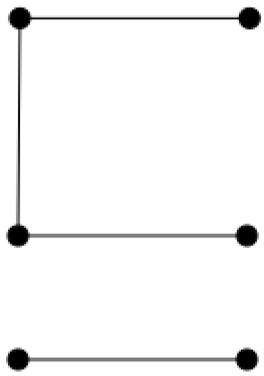
4) Если вершины степени 2 смежны, то граф задаётся однозначно с точностью до изоморфизма:



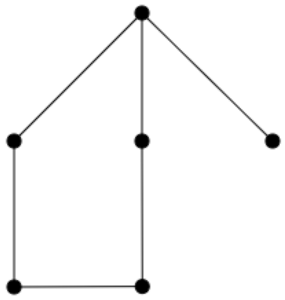
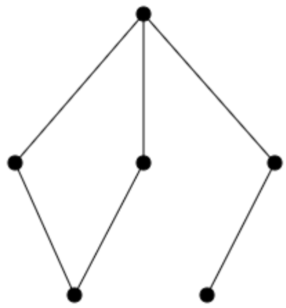
Имеем по 4 графа для каждой из предложенных степеней последовательности.

1.0. *1) Нет, не верно.* Пример двух графов, локально-1 равных, но не являющихся изоморфными, приведён в пункте 1.1.
2) Да, верно. Заметим, что из локально-1 равенства следует равенство подграфов, порождённых окружениями каждой из вершин, а так как окружение вершины однозначно определяет её степень, то степенные последовательности графов равны, а значит, они локально-0-равные.

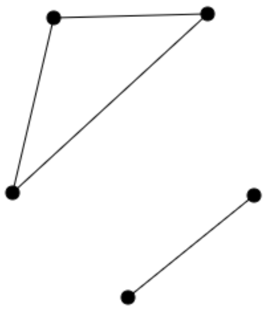
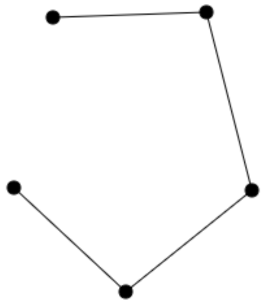
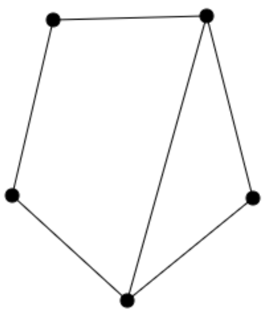
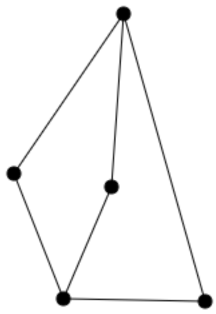
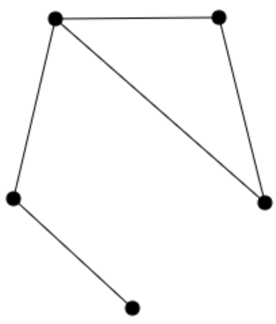
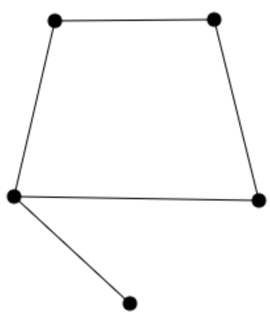
1.1. Два следующих графа имеют равные множества подграфов, порождённых окружениями каждой из вершин, но при этом графы являются неизоморфными и несвязными:

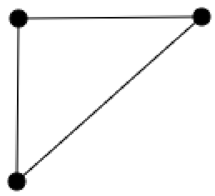
Два следующих графа являются связными, неизоморфными и локально-1 равными:

Докажем, что минимальный порядок локально-1 равных графов равен 6 в случаях связных и несвязных графов. Для этого следует проверить на локально-1 равенство локально-0 равные графы порядка 5 и ниже (так как из локально-1 равенства следует локально-0 равенство).

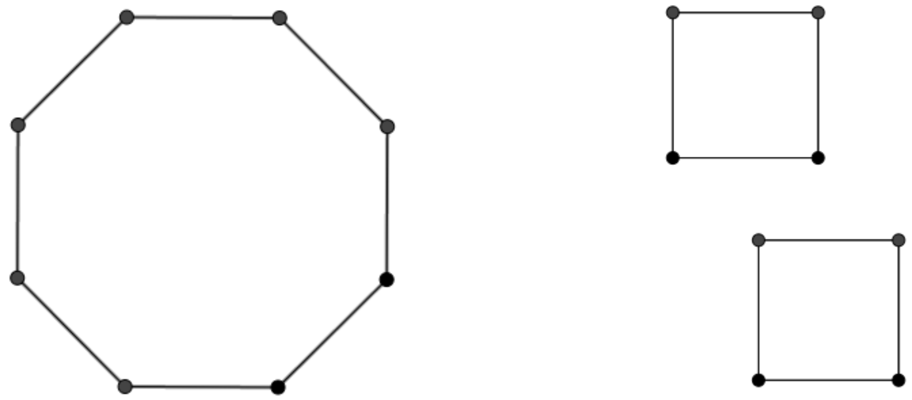
	**(1;1;2;2;2)**		**(1;1;2;2;2)**
	**(2;2;2;3;3)**		**(2;2;2;3;3)**
	**(1;2;2;2;3)**		**(1;2;2;2;3)**

Данные графы не являются локально-1 равными, так как у всех графов первого столбца есть подграф, являющийся треугольным графом, а графов второго столбца такого подграфа нет.

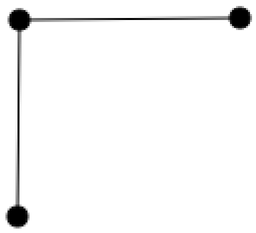


Отсюда следует, что минимальный порядок локально-1 равных графов равен 6.

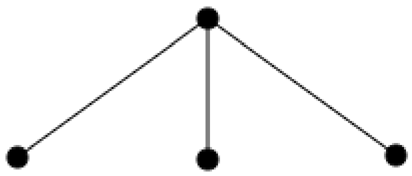
1.2. Если графы G_1 и G_2 несвязные, то наименьшее число вершин графа H равно трём (оно не может быть меньше трёх – данный вопрос более подробно рассмотрен в п. 4).
Рассмотрим два следующих графа:



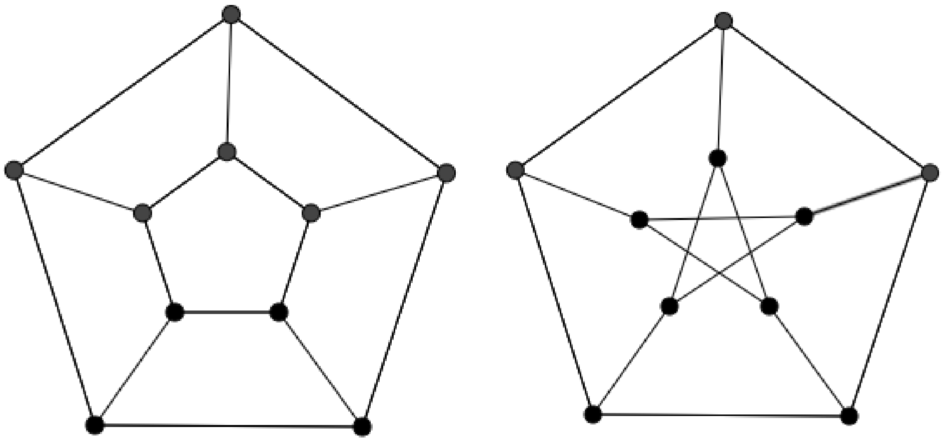
Граф H будет следующим:



Графы, очевидно, неизоморфны и локально-1-H совершенны.
Если графы G_1 и G_2 связные, то наименьшее число вершин графа H равна 4. (доказательство того, что 4 – минимальное число вершин рассмотрено в п. 4)
Граф H:

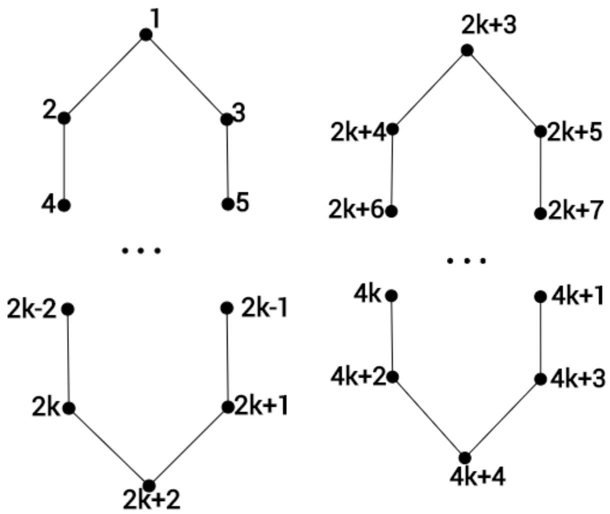


Рассмотрим графы:

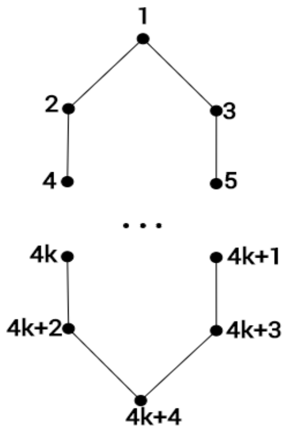


Данные графы локально-1-H совершенны. Также они неизоморфны, так как диаметр первого графа равен трём, а второго – двум.

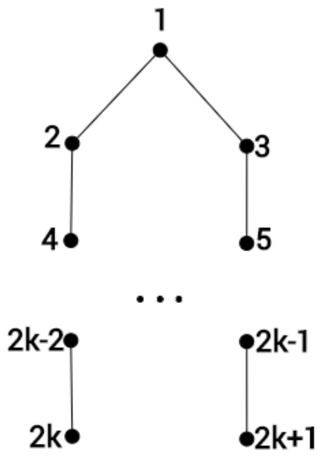
Пункт 2. Приведём пример двух несвязных графов общего вида, которые являются локально-k равными и неизоморфными:
1-й граф:



2-й граф:

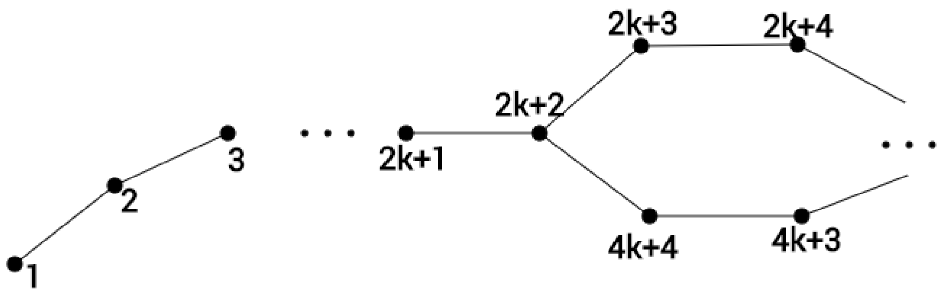


Все подграфы, порождённые для каждой из вершин двух графов на расстоянии не более k, будут изоморфны следующему графу:

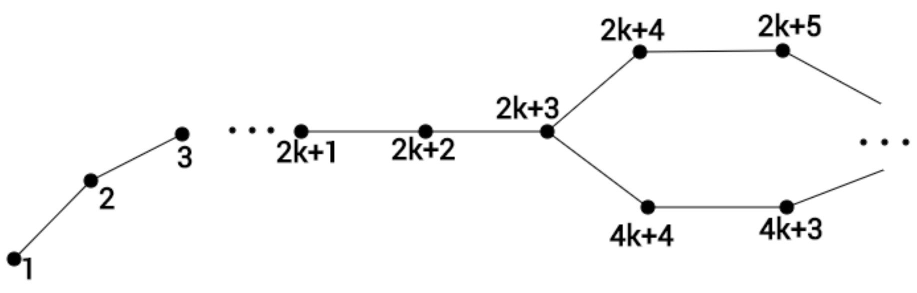


Откуда следует, что наборы подграфов, порождённых для каждой вершины на расстоянии не более k от них, будут равны у обоих графов, однако графы не являются изоморфными.

Приведём пример двух связных графов общего вида, которые являются локально-k равными и неизоморфными:
1-ый граф:



2-ой граф:



Два графа буду неизоморфными, так как первый граф содержит единственный цикл на $2k+3$ вершинах, а второй граф содержит единственный цикл на $2k+2$ вершинах. Заметим, что у данных графов будут попарно равные подграфы, порожденные множеством вершин на расстоянии не более k от следующих вершин (запись (u, v))

означает, что соответствующие подграфы для вершины *u* первого графа и вершины *v* второго графа изоморфны):
(1,1); (2,2); … (k+2, k+2); (k+3, k+4); (k+4;k+5); … (3k+3;3k+4); (3k+4; k+3); (3k+5;3k+5); … (4k+4;4k+4).
Очевиден изоморфизм подграфов для пар *(1,1); (2,2); … (k+2, k+2).* Далее одна вершина второго графа пропускается, и тогда имеет место изоморфизм для пар *(k+3, k+4); (k+4, k+5); … (3k+3;3k+4).* Далее подграфы, порождённые всеми вершинами на расстоянии *k*, для вершин *3k+4* первого графа и *k+3* второго графа, так как они являются простыми цепями на *2k+1* вершинах. Не сложно убедиться, что подграфы каждой из пар *(3k+5;3k+5); … (4k+4;4k+4)* изоморфны между собой.

3. Рассматриваем связный граф G и его мультимножества N_i (G) для i от 1 до диаметра графа G.
Эксцентриситетом вершины v в графе G называется наибольшее расстояние между v и некоторой другой вершиной графа G.
Пусть в некотором графе из N_k (G) нет ни одной вершины с эксцентриситетом k. Если эксцентриситет вершины больше k, эта вершина не может являться вершиной, k-окружением которой является данный граф из N_k (G). Значит, эксцентриситет вершины, для которой граф является графом из N_k (G), меньше k. Тогда для этой вершины не существует цепи длины k из неё. Отсюда следует, что ни для одной из таких вершин в графе G нет ни одной цепи длины k. Т.е. k > diam G, противоречие.
Итак, в каждом графе из N_k (G) существует вершина с эксцентриситетом k.

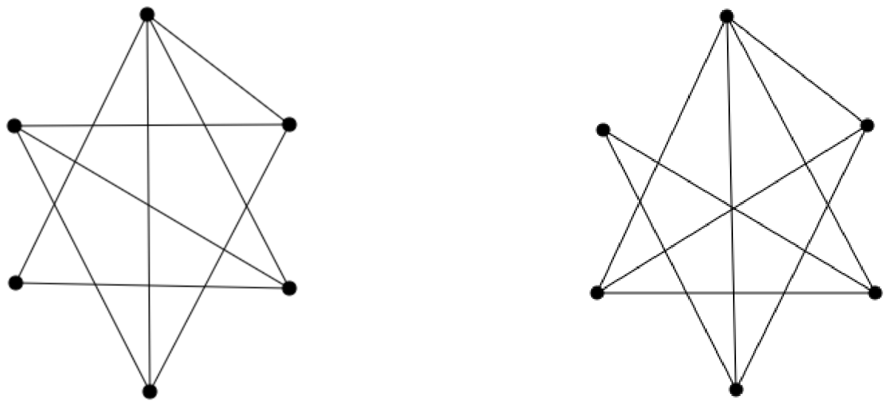
Теорема.
Дан граф G.
Если в каждом графе N_k (u_k, G) из мультимножества N_k(G) существует ровно одна вершина v_i с эксцентриситетом равным k, то можно однозначно определить мультимножество N_{k-1}(G) как мультимножество окружений порядка k-1 вершин v_i, где i от 1 до n. Иначе говоря, это есть мультимножество графов N_{k-1} (v_i, G), где i от 1 до n.

Доказательство. Как было доказано выше, вершина u_i, k-окружением которой является граф N_k (u_i, G), имеет в нём эксцентриситет k. Если вершина с эксцентриситетом k в таком графе единственна, мы можем утверждать, что она и является вершиной u_i. По условию теоремы в каждом из графов мультимножества N_k (G) такая вершина единственна, потому мы можем однозначно восстановить набор вершин u_i, i от 1 до n. В таком случае, так как (k-1)-окружение вершины является подграфом её k-окружения, то рассмотрев (k-1)-окружения вершин u_i в соответствующих графах из N_k (G), мы однозначно восстановим мультимножество N_{k-1} (G).■

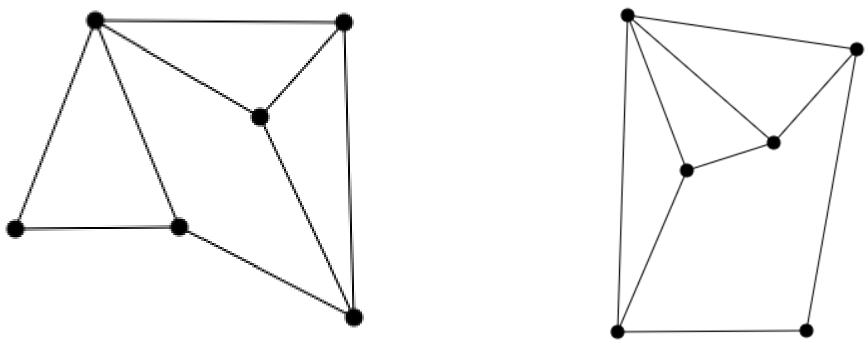
Следствие.
Если в графе N_k (u_i, G) существует несколько вершин с эксцентриситетом k, и при этом окружения (k-1)-го порядка каждой из них попарно изоморфны,
то утверждение остаётся верным.
Доказательство. Аналогично доказательству теоремы рассмотрим (k-1)-окружения вершин u_i в соответствующих графах из N_k (G). Так как для рассматриваемых вершин они изоморфны, мультимножество N_{k-1} (G) восстанавливается однозначно.■

Локальная схожесть дополнений.
Рассмотрим дополнения следующих графов (данные графы локально-1 равные):

Дополнения:



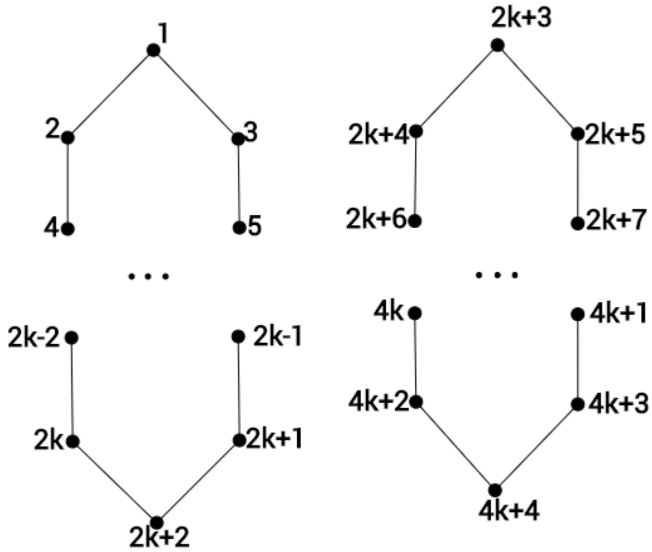
Приведём данные графы к более наглядному виду:



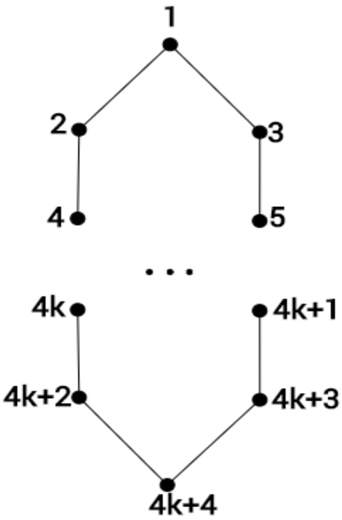
Так как у данных графов только по одной вершины степени 2, то подграфы, порождённые для этих двух вершин множеством вершин на расстоянии 1 от них, должны быть равны (для того, чтобы данные графы были локально-1 равными). Но, заметим, что данные подграфы не равны, так как в одном из них 3 ребра, а в другом – два. Значит, наборы подграфов не равны, и графы не локально-1 равные.
Отсюда следует, что если два графа локально-1 схожи, то их дополнения не обязательно локально-1 схожи.
Если рассмотреть графы, являющиеся локально-0 равными, то их дополнения также будут локально-0 равны. Рассмотрим два графа порядка k:
Пусть степенные последовательности графов следующие: $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.
Тогда дополнения графов будут иметь равные степенные последовательности: $(k-x_1-1; k-x_2-1; \dots; k-x_n-1)$, откуда и следует локально-0 равенство дополнений.

Рассмотрим следующие две пары графов общего вида:
1-ая пара:

1-ый граф:

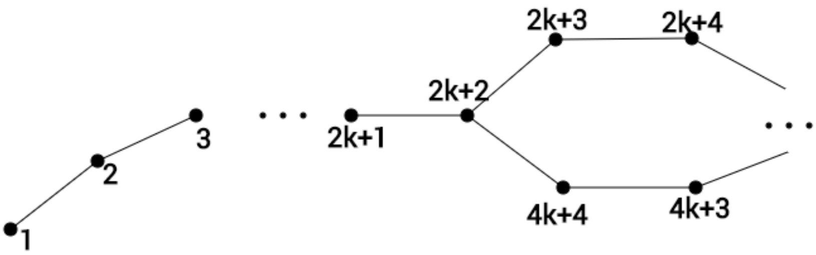


2-ой граф:

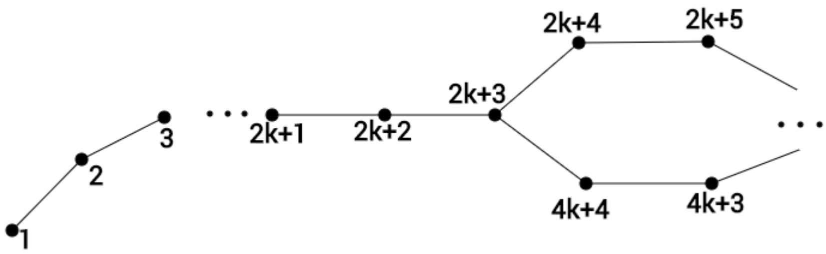


2-ая пара:

1-ый граф:



2-ой граф:



Построим дополнения этих графов. Несложно видеть, что их диаметр равен 2. Рассмотрим подграфы, порождённые множеством вершин на расстоянии не более k от некой вершины графа-дополнения. При $k \geq 2$ каждый из них является самим графом. Т.к. исходные графы неизоморфны, то неизоморфны и подграфы, а значит, графы не являются k-схожими. Случай $k = 1$ был рассмотрен ранее.

Пункт 4. Решение пункта 4 вынесено в дополнение к работе.

Пункт 5. Исходя из локальной схожести порядка k рассмотренных выше графов, можно получить оценку значений $\xi(k)$ и $\psi(k)$:

$\xi(k) \leq 4k+4$ и $\psi(k) \leq 4k+4$ – данные оценки не является точными, однако дают приближённое значение минимального порядка.

$\xi(1) \leq 8$ и $\psi(1) \leq 8$, при переборе получено $\xi(1) = 6$ и $\psi(1) = 6$.

Также получены следующие точные значения: $\xi(0) = 5$, $\psi(0) = 5$.

Дополнение:

0.2 . При переборе графов используем их изображение в виде таблицы, в первом столбце которой будет нарисован сам граф, а во втором столбце будет записана степенная последовательность соответствующего графа:

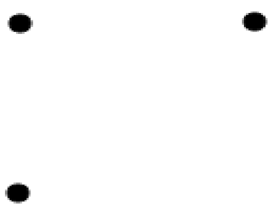
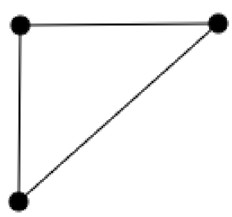
1) 1 вершина – имеем один граф:

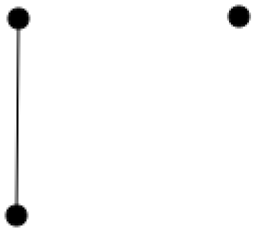
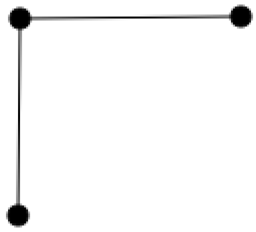
	**(0)**

2) 2 вершины – 2 графа:

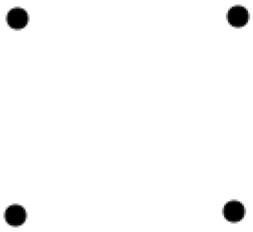
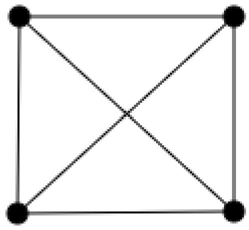
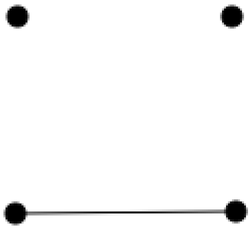
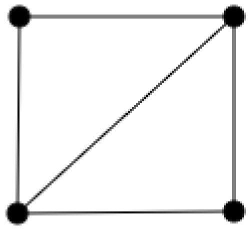
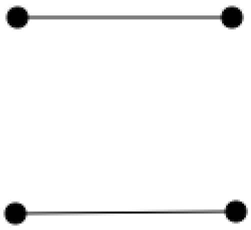
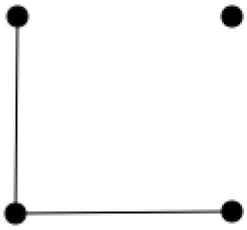
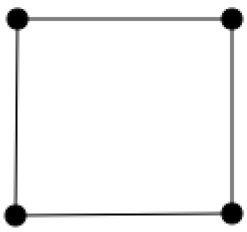
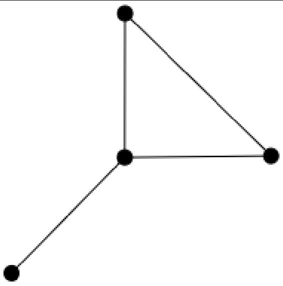
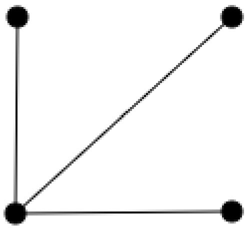
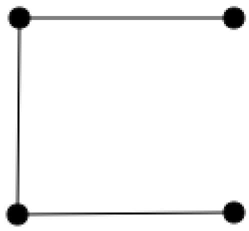
	**(0;0)**		**(1;1)**

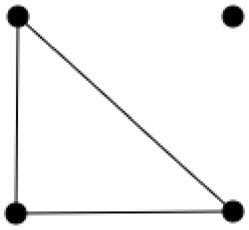
3) 3 вершины – 4 графа:

	**(0;0;0)**		**(2;2;2)**

	**(0;1;1)**		**(1;1;2)**

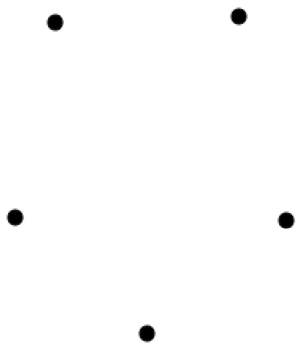
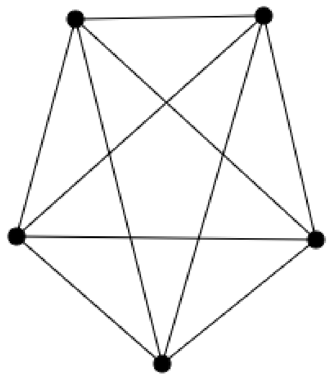
4) 4 вершины – 11 графов:

	**(0;0;0;0)**		**(3;3;3;3)**
	**(0;0;1;1)**		**(2;2;3;3)**
	**(1;1;1;1)**		**(0;1;1;2)**
	**(2;2;2;2)**		**(1;2;2;3)**
	**(1;1;1;3)**		**(1;1;2;2)**

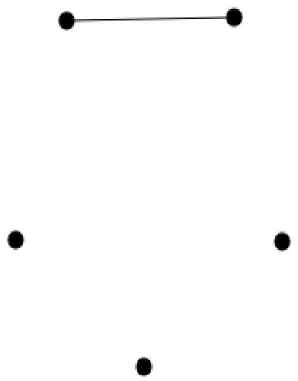
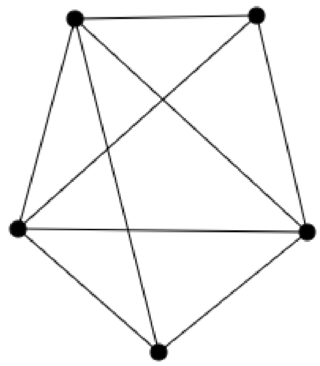
	**(0;2;2;2)**

5) 5 вершин:
Для удобства перебора рассмотрим все графы с небольшим количеством рёбер, а потом рассмотрим их дополнения:

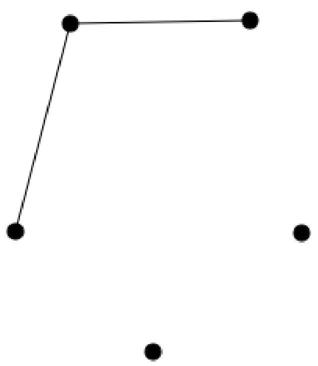
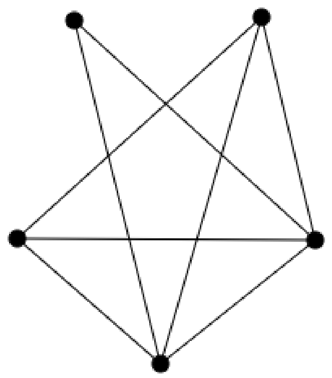
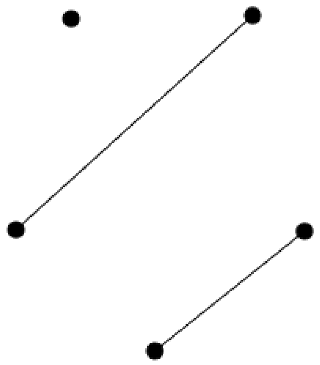
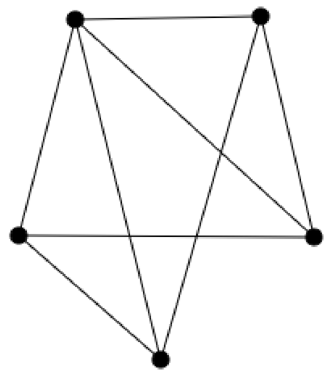
1. 0 или 10 ребёр – 2 графа:

	**(0;0;0;0;0)**		**(4;4;4;4;4)**

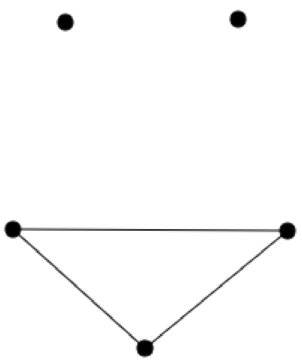
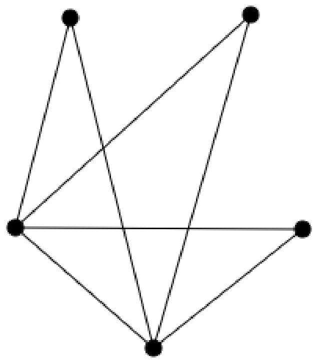
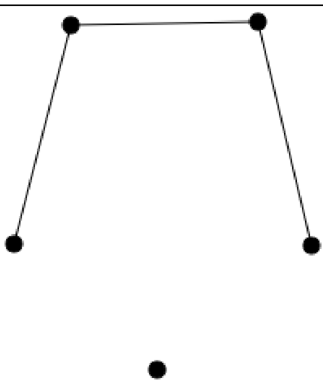
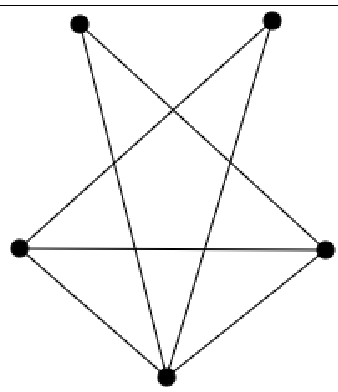
2. 1 или 9 рёбер – 2 графа:

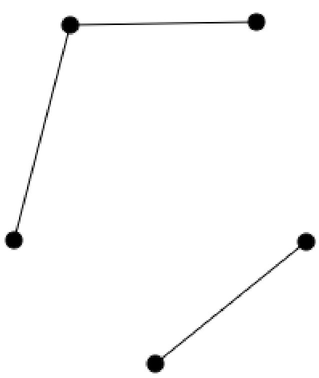
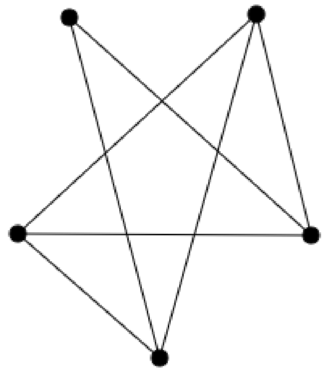
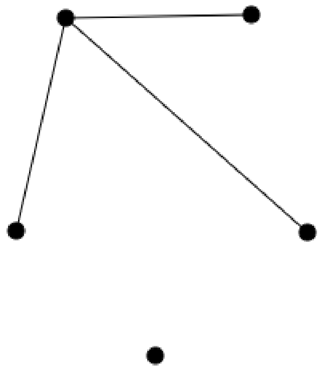
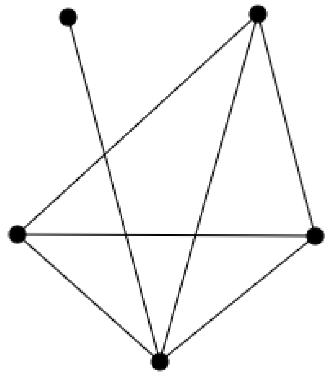
	**(0;0;0;1;1)**		**(3;3;4;4;4)**

3. 2 или 8 рёбер – 4 графа:

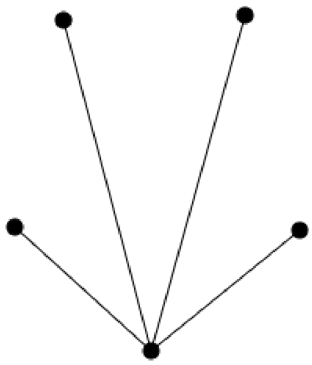
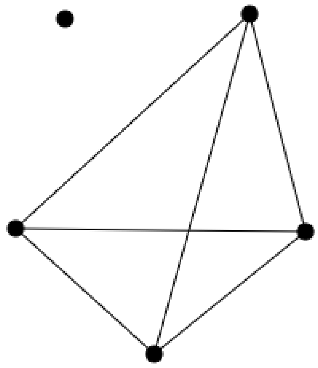
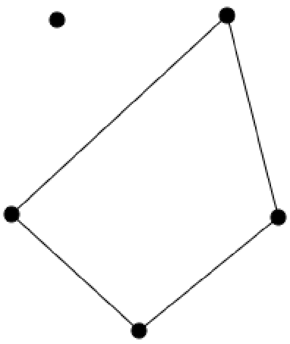
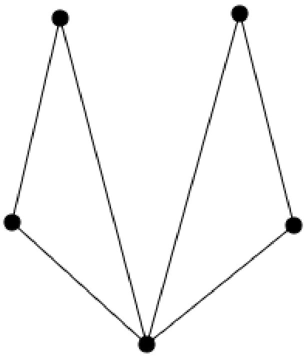
	**(0;0;1;1;2)**		**(2;3;3;4;4)**
	**(0;1;1;1;1)**		**(3;3;3;3;4)**

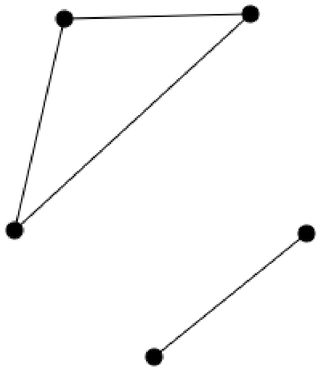
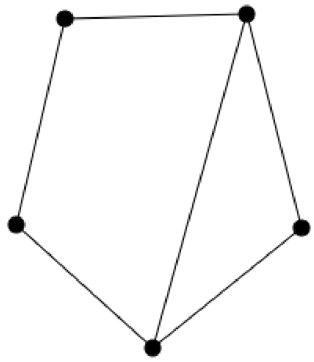
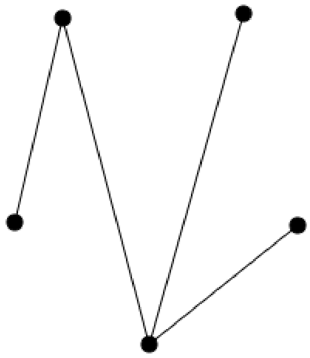
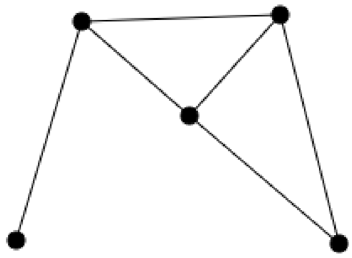
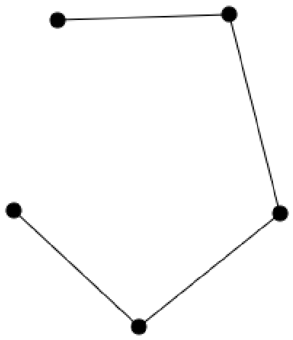
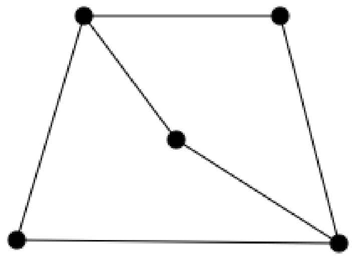
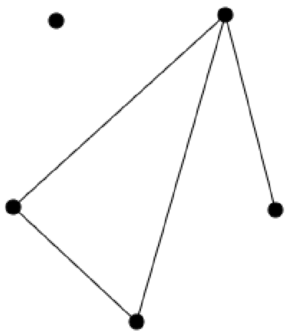
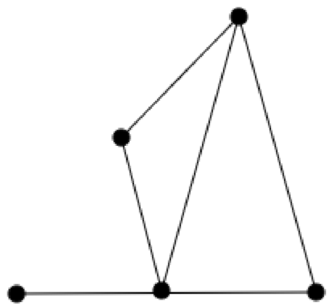
4. 3 или 7 рёбер – 8 графов:

	**(0;0;2;2;2)**		**(2;2;2;4;4)**
	**(0;1;1;2;2)**		**(2;2;3;3;4)**

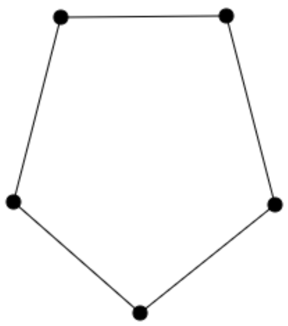
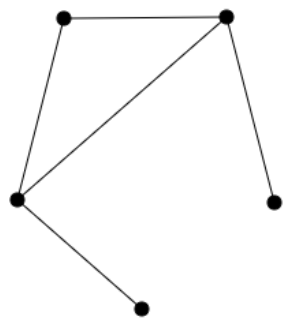
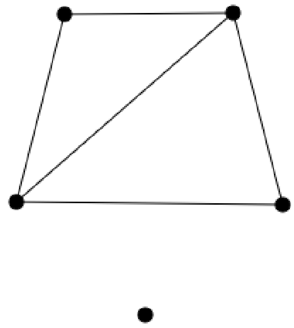
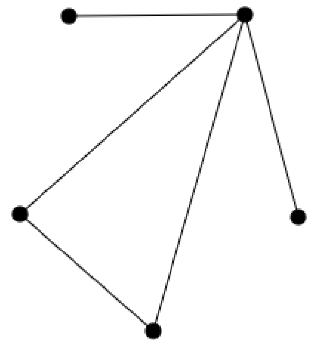
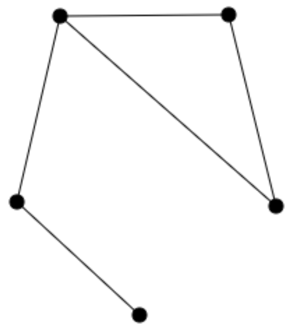
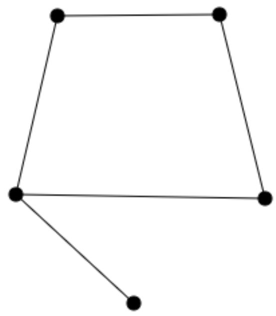
	**(1;1;1;1;2)**		**(2;3;3;3;3)**
	**(0;1;1;1;3)**		**(1;3;3;3;4)**

5. 4 или 6 рёбер – 12 графов:

	**(1;1;1;1;4)**		**(0;3;3;3;3)**
	**(0;2;2;2;2)**		**(2;2;2;2;4)**

	**(1;1;2;2;2)**		**(2;2;2;3;3)**
	**(1;1;1;2;3)**		**(1;2;3;3;3)**
	**(1;1;2;2;2)**		**(2;2;2;3;3)**
	**(0;1;2;2;3)**		**(1;2;2;3;4)**

6. 5 рёбер – 6 графов:

	**(2;2;2;2;2)**		**(1;1;2;3;3)**
	**(0;2;2;3;3)**		**(1;1;2;2;4)**
	**(1;2;2;2;3)**		**(1;2;2;2;3)**

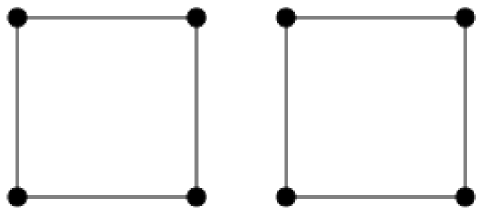
4. Отметим, что граф *H* всегда связный, так как в нём по определению найдётся вершина, смежная со всеми остальными вершинами.
Как обобщение пункта *1.2* для всех графов *H* с числом вершин меньше 6, при условии существования локально-1-*H*-совершенного графа, будем искать пару двух неизоморфных локально-1-*H*-совершенных графа с одинаковым числом вершин (если число вершин разное, графы неизоморфны).
Рассмотрим отдельно полные графы *H*: граф *H* является локально-1-*H* совершенным графом и невозможно построить два неизоморфных локально-1-*H*-совершенных графа, так как такие графы обязательно состоят из нескольких компонент связности, каждая из которых - полный граф *H* – при одинаковом количестве вершин исходные графы обязательно изоморфны. Далее полные графы мы рассматривать не будем.

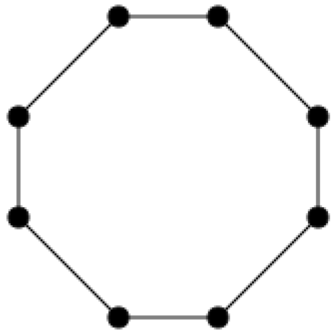
1) 1 вершина. Очевидно, что если *H* содержит только одну вершину, то одна вершина и будет являться локально-1-*H*-совершенным графом, в общем случае примером будет любой граф без рёбер. Также в этом случае невозможно построить два неизоморфных локально-1-Н-совершенных графа, так как при одинаковом количестве вершин два графа в любом случае будут изоморфны.

2) 2 вершины. Возможен только 1 вариант для *H* (полный граф на двух вершинах). Примером будет любой граф из *n/2* попарно несмежных рёбер.

3) 3 вершины. Существует два варианта связного графа на трёх вершинах: полный граф и цепь длины 3. Если H - это цепь длины 3, то степень каждой вершины локально-1-H-совершенного графа равна 2, а потому это граф, состоящий из нескольких компонент связности, каждая из которых - простой цикл. Если граф связен, то это непременно простой цикл, поэтому нельзя построить два локально-1-H-совершенных неизоморфных связных графа. А вот в случае несвязных графов такой пример существует:

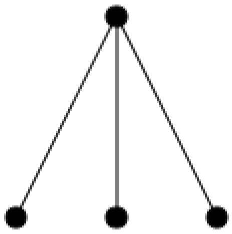
G_1: G_2:





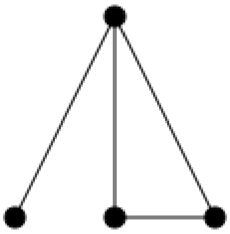
4) 4 вершины.

I. H:



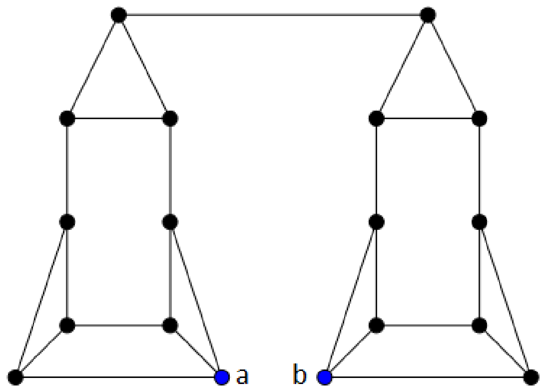
Данный граф был рассмотрен нами в п. 1.2.

II. H:

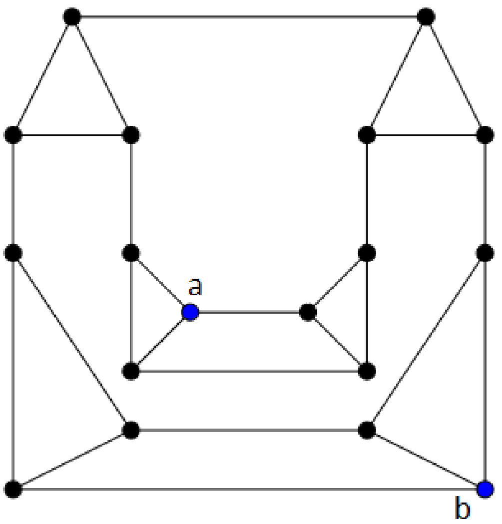


Пара неизоморфных локально-1-H-совершенных графов:

G_1:

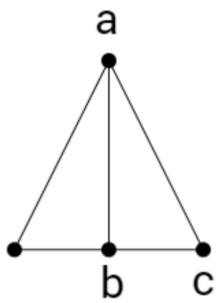


Диаметр данного графа равен семи (расстояние между вершинами *a* и *b*).
G_2:



Диаметр данного графа равен шести (расстояние между вершинами *a* и *b*).
Графы неизоморфны, так как не равны их диаметры.

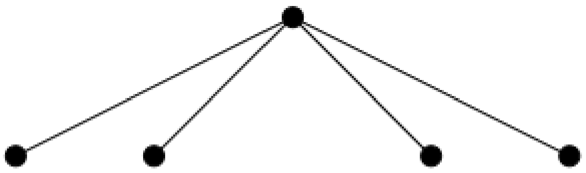
III. *H*:



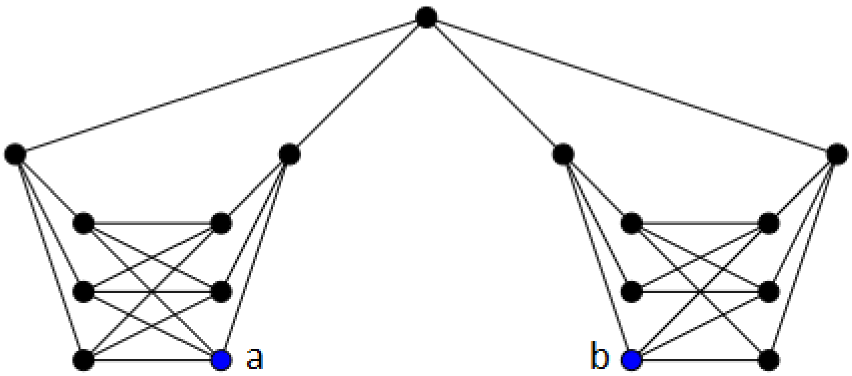
Для удобства здесь и далее будем обозначать за *H(b)* подграф графа *G*, изоморфного *H* и порождённого множеством вершин на расстоянии 1 от вершины *b*. Доказывать, что для какого-либо *H* невозможно построить локально-1-*H*-совершенный граф будем следующим образом: будем рассматривать граф *H*, и, поочерёдно рассматривая $H(a_i)$ для каждой вершины a_i, достраивать его до графа *G*, являющимся локально-1-*H*-совершенным. В процессе достроения будет обнаруживаться какое-то противоречие, откуда и будет следовать факт невозможности построения локально-1-*H*-совершенного графа.
H(b) будем называть достроенным, если при построении графа *G*, подграф, порождённый всеми вершинами на расстоянии 1 от *b*, будет изоморфен графу *H*. Достроенный подграф *H(b)* обладает одним замечательным свойством: если с *b* будет смежна хотя бы ещё одна вершина не из *H(b)*, то подграф, порождённый множеством вершин на расстоянии 1 от *b* в исходном графе *G*, не будет изоморфен *H*, а значит, *G* не будет локально-1-*H*-совершенным графом.
Обозначим вершины *a, b, c* как показано на рисунке выше. Заметим, что в графе *H*, подграфы *H(a)* и *H(b)* – достроены. Рассмотрим вершину *c*. Для того, чтобы *H(c)* стал достроенным, необходимо, чтобы нашлась какая-то вершина *d*, отличная от *a* и *b*, и смежная с вершиной *c* и с какой-либо одной вершиной множества *{a, b}*, что невозможно, так как подграфы *H(a)* и *H(b)* достроены. Отсюда следует, что построить локально-1-*H*-совершенный граф нельзя.

<u>5) 5 вершин.</u>

I. *H*:

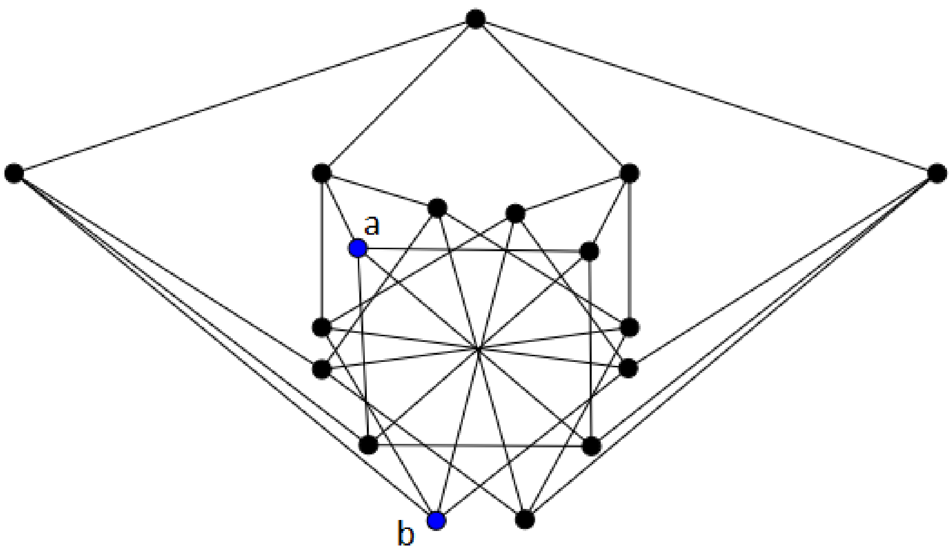


G_1:



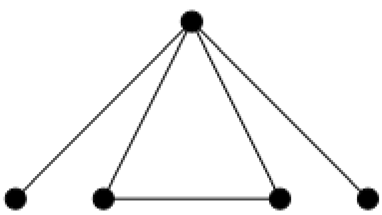
Диаметр данного графа равен четырём (расстояние между вершинами *a* и *b*).

G_2:

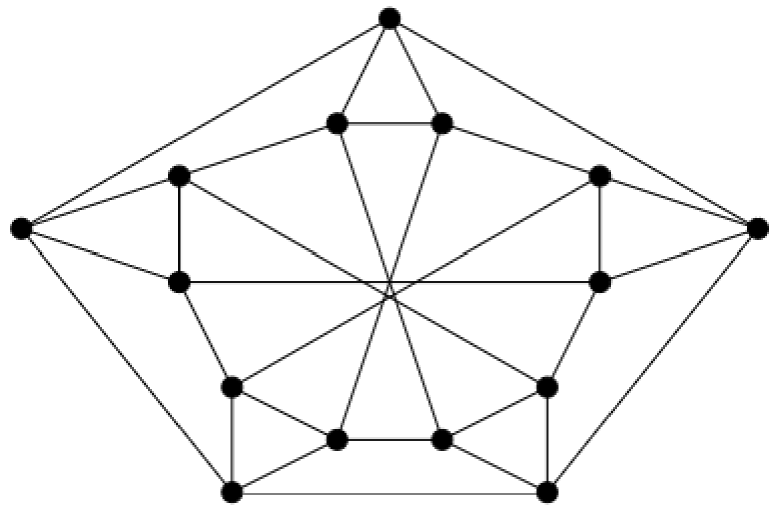


Диаметр данного графа равен 3 (расстояние между вершинами *a* и *b*).
Графы неизоморфны, так как не равны их диаметры.

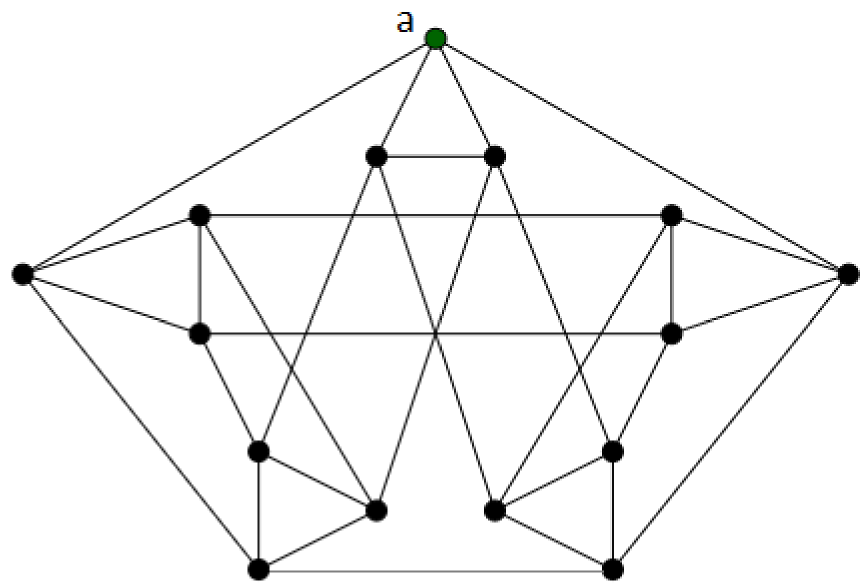
II. *H*:



G_1:

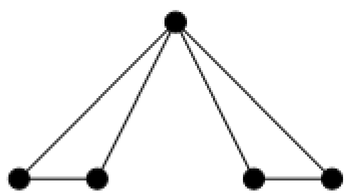


G_2:

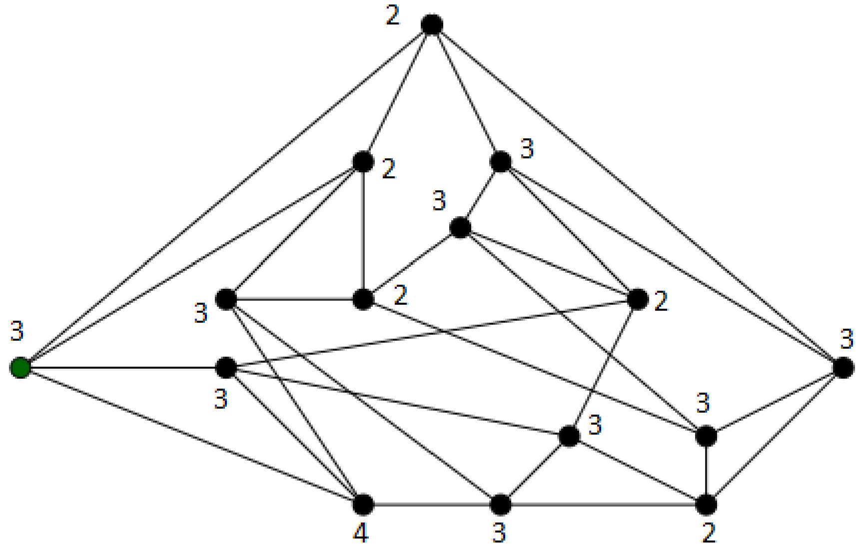


У вершины *a* число расстояний длины 3 равно нулю, а у всех остальных вершин обоих графов оно больше нуля. Отсюда следует, что графы неизоморфны.

III. *H*:

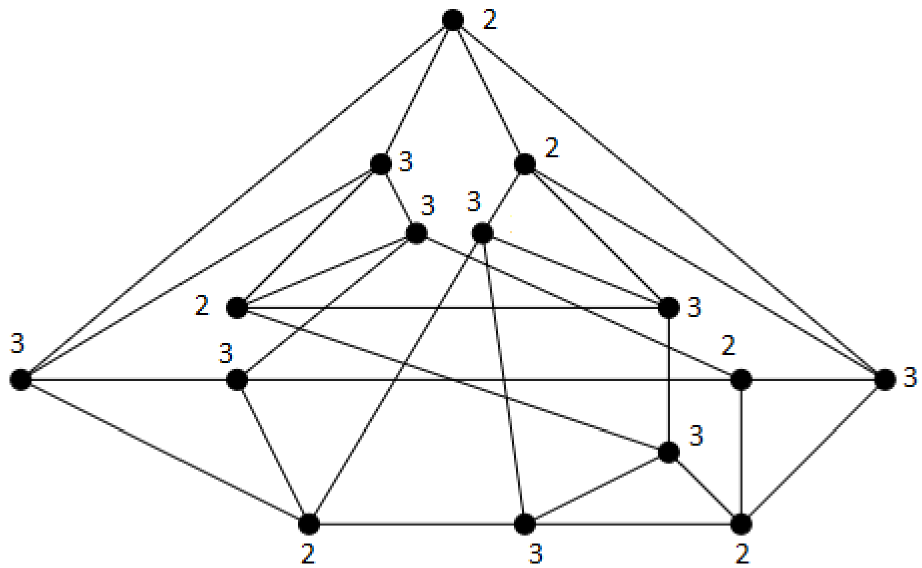


G_1:

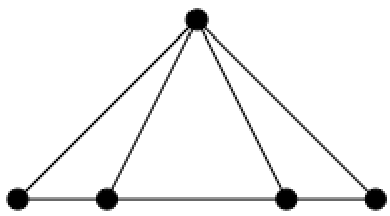


G_2:

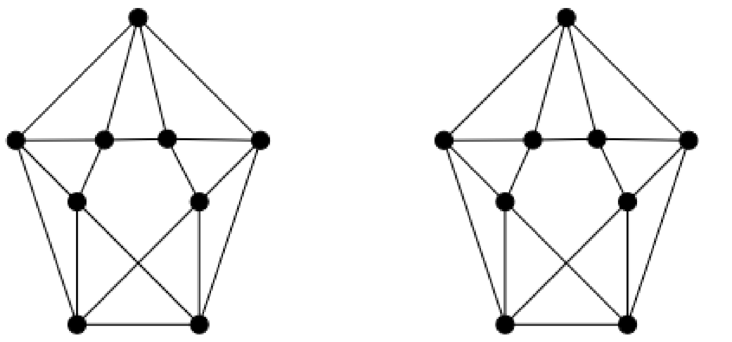
В графе G_1 имеется вершина, число расстояний длины 3 которой равно 4, во втором графе такой вершины нет (рядом с каждой вершиной написано количество расстояний длины 3 для этой вершины). Отсюда следует, что графы неизоморфны.



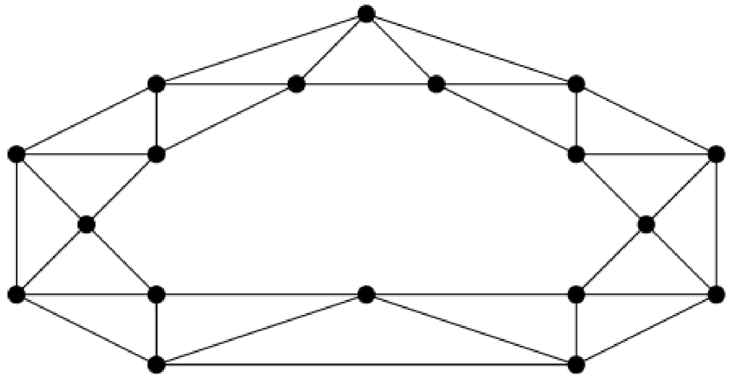
IV. *H*:



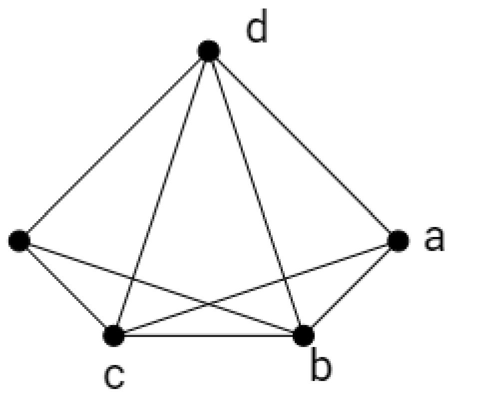
G_1:



G_2:
Графы, очевидно, неизоморфны.

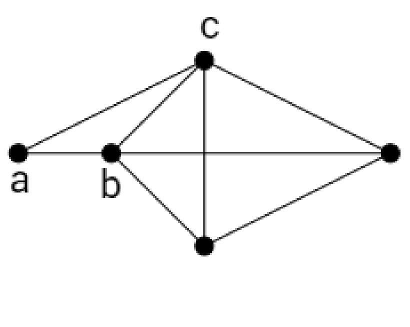


V. *H*:



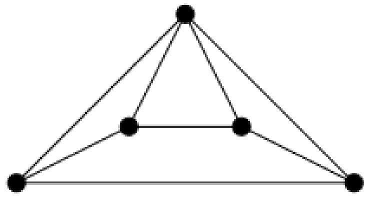
Заметим, что для того, чтобы *H(a)* был достроенным, необходимо, что нашлась какая-то вершина *k*, смежная с *a* и смежная хотя бы с двумя вершинами множества *{b, c, d}*. Но подграфы *H(d), H(b)* и *H(c)* уже являются достроенными. Отсюда следует, что нельзя построить локально-1-*H*-совершенный граф.

VI. *H*:

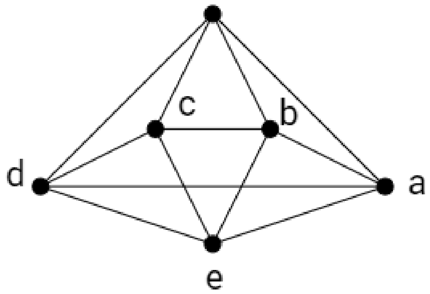


Заметим, что для того, чтобы $H(a)$ был достроенным, необходимо, чтобы нашлись две вершины p и q, смежные с a, также хотя бы одна из $\{p, q\}$ должна быть смежная с какой-либо вершиной из $\{b, c\}$, что невозможно, так как $H(b)$ и $H(c)$ достроенные, а значит нельзя построить локально-1-H-совершенный граф.

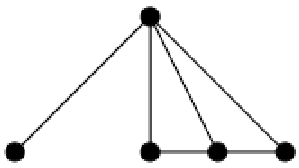
VII. H:



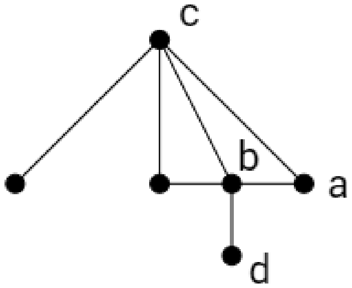
Обозначим вершины как показано на рисунке ниже:



Рассмотрим вершину a. Для того, чтобы $H(a)$ был достроенным, необходимо присутствие в графе вершины e, смежной с вершинами b и d. Далее рассмотрим $H(b)$. Для того, чтобы он был достроенным, необходима смежность вершин c и e. Несложно убедиться, что граф, полученный нами, является примером локально-1-H-совершенного графа.
Из построения также следует тот факт, что невозможно построить пару неизоморфных локально-1-H-совершенны графов, так как любой локально-1-H-совершенный граф будет состоять из нескольких компонент связности, каждая из которых является графом, приведённым выше. А так как количество вершин графов одинаково, то и число компонент связности тоже одинаково, откуда и следует изоморфизм.
VIII. H:

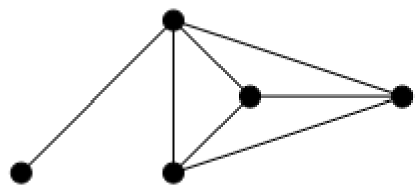


Обозначим вершины как показано на рисунке ниже:

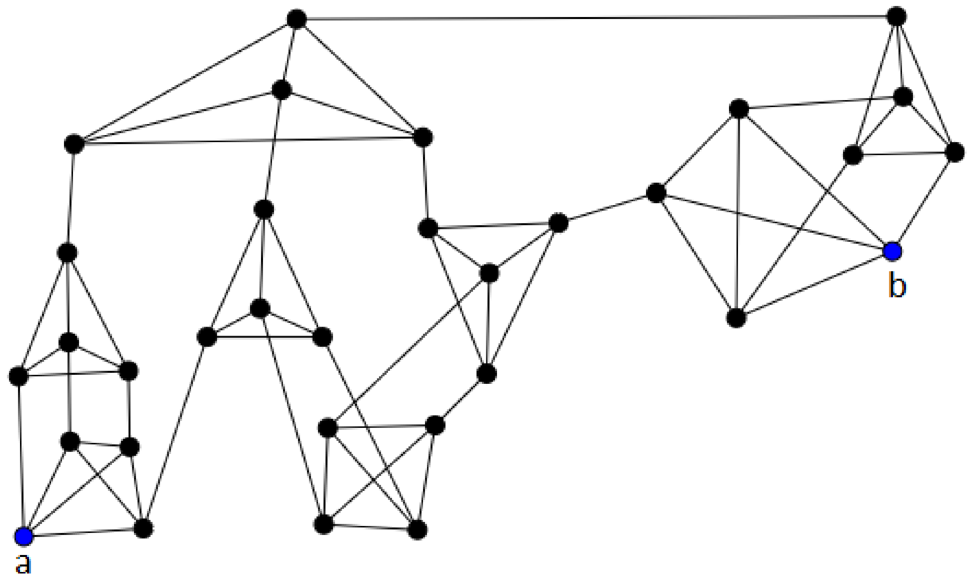


Рассмотрим вершину b. Чтобы $H(b)$ был достроенным, необходимо, чтобы в графе была вершина d, смежная с b и не смежная с a. Рассмотрим $H(a)$. Чтобы $H(a)$ был достроенным, нужны две вершины, смежные с а, причём одна из них должна быть смежна либо с вершиной *c,* либо с вершиной *b* (так как степенная последовательность *H* (1, 2, 2, 3, 4) и вершины *b* в *H(a)* уже имеют степени равные двум), что невозможно, так как *H(b)* и *H(c)* уже достроены – нельзя построить локально-1-*H*-совершенный граф.

IX. *H*:

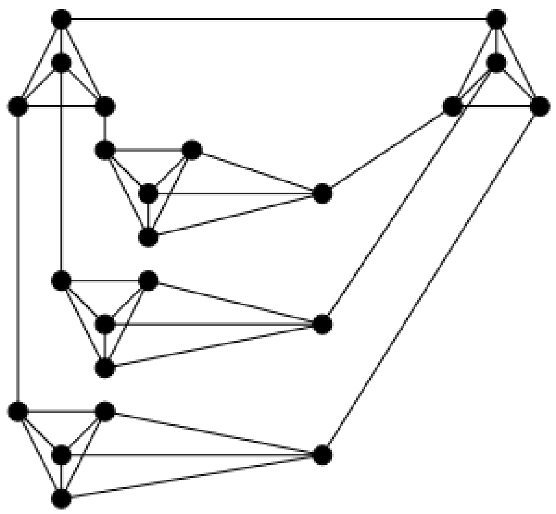


G_1:

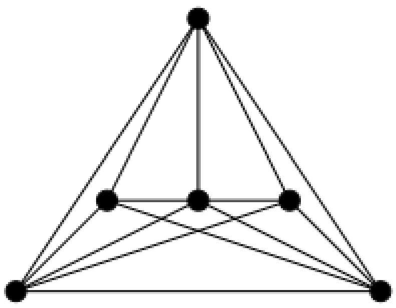
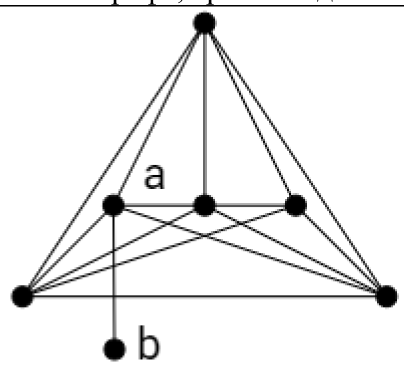
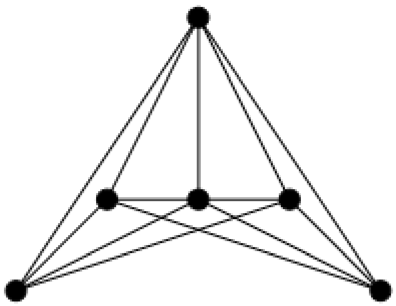
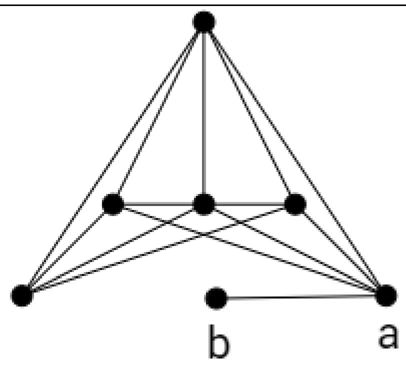
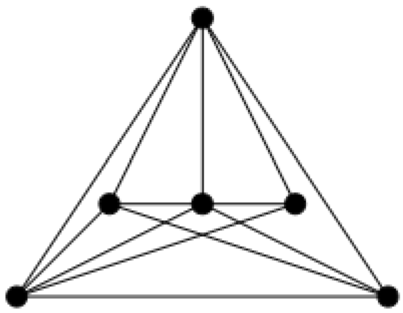
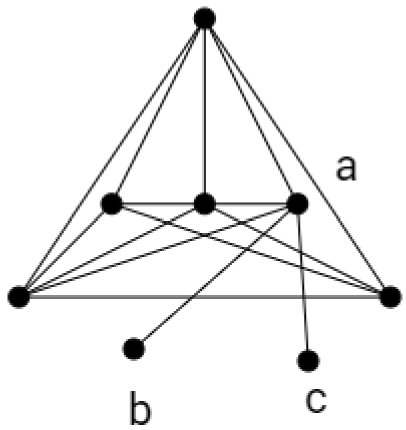


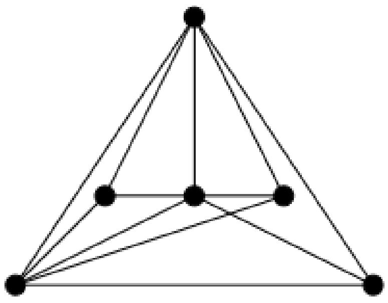
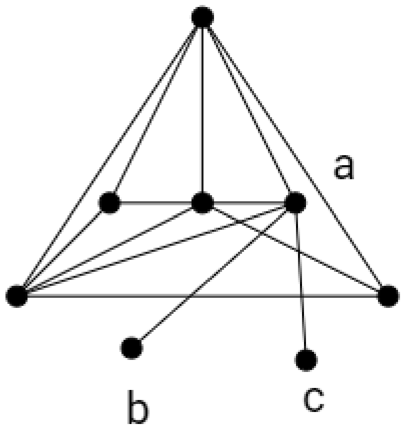
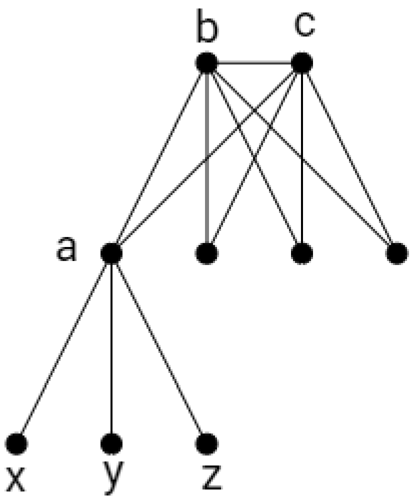
Расстояние между вершинами *a* и *b* равно 7, а значит диаметр графа не меньше 7.

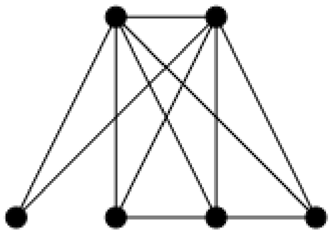
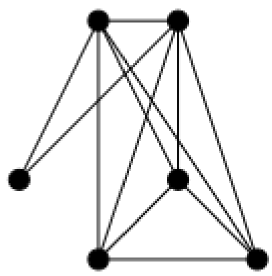
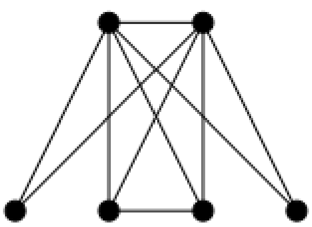
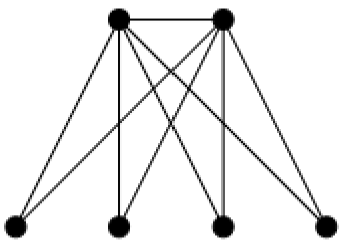
G_2: Диаметр данного графа меньше 7, а значит, графы неизоморфны.

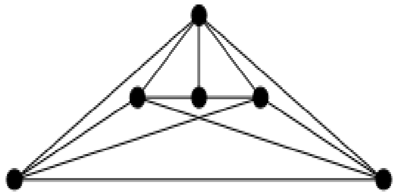
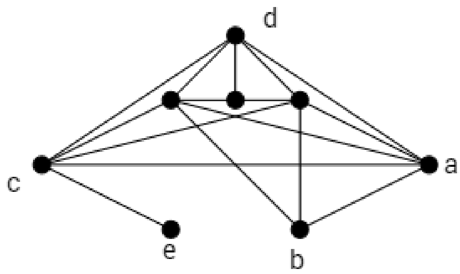
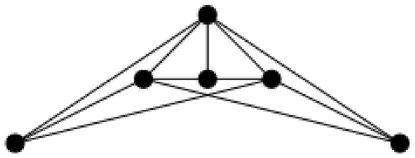
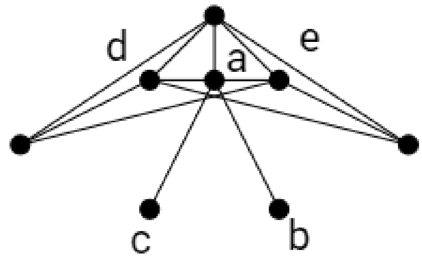
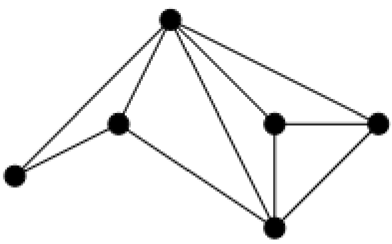
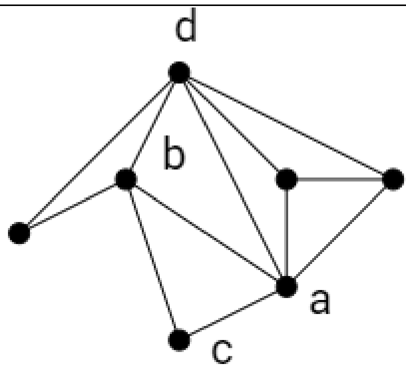


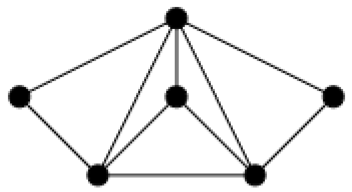
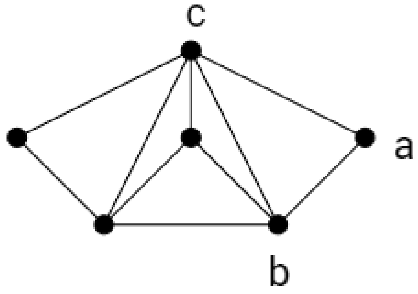
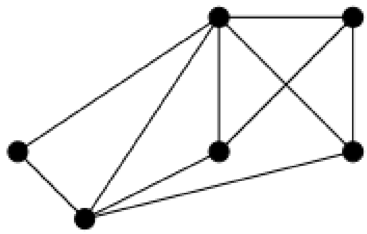
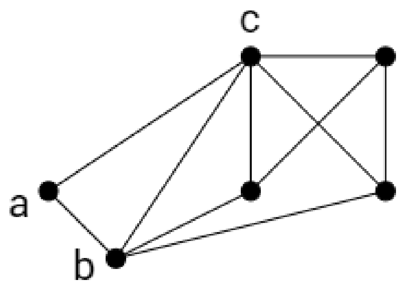
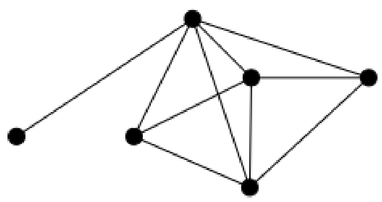
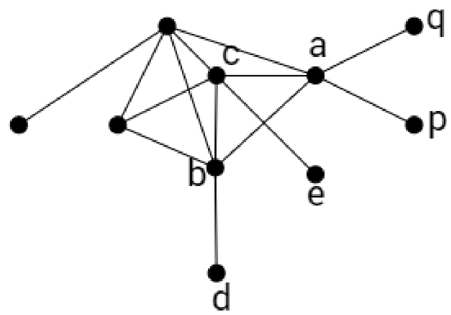
6) 6 вершин. Для графов H на шести вершинах не будем искать пару неизоморфных локально-1-H-совершенных графов. Сначала рассмотрим те графы H, для которых нельзя построить локально-1-H-совершенный граф. Для удобства начертим таблицу: первый столбец – граф H, второй – граф, иллюстрирующий доказательство невозможности построения локально-1-H-совершенного графа, третий – доказательство.

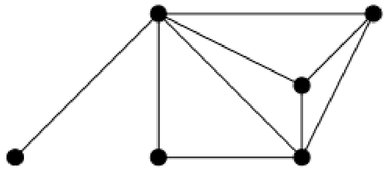
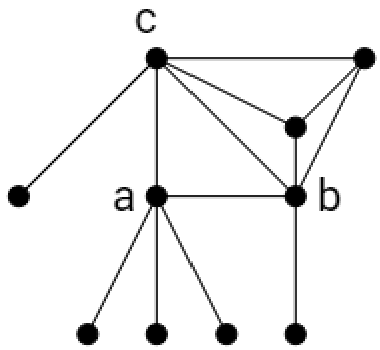
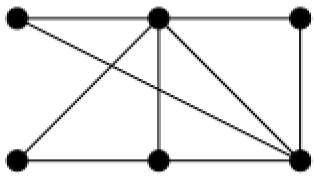
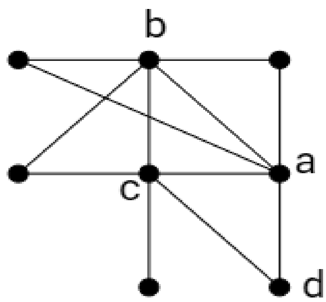
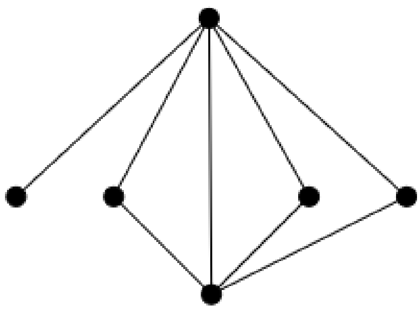
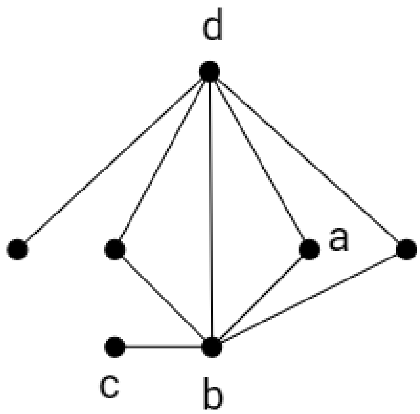
		Рассмотрим вершину a. Чтобы $H(a)$ был достроенным, необходима вершина b, смежная с a и c какими-то тремя вершинами, смежными с a, что невозможно, так как все графы H вершин, смежных с a, являются достроенными.
		Рассмотрим вершину a. Чтобы $H(a)$ был достроенным, необходима вершина b, смежная с a и с тремя вершинами, смежными с a, что невозможно, так как графы H двух из четырёх вершины, смежных с a, являются достроенными.
		Рассмотрим $H(a)$. Для того, чтобы он был достроенным, нужны две вершины b и c, смежные с a, и смежные с несколькими вершинами, смежными с a, но все H графы вершин, смежных с a, являются достроенными.

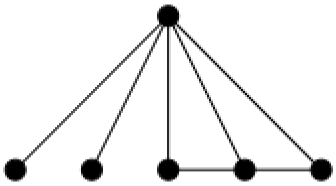
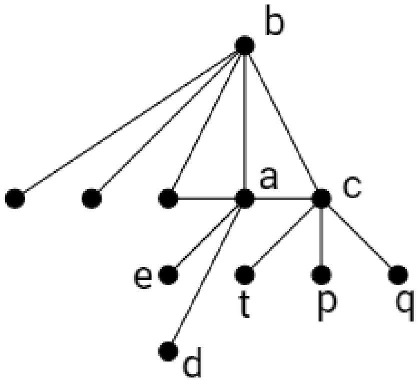
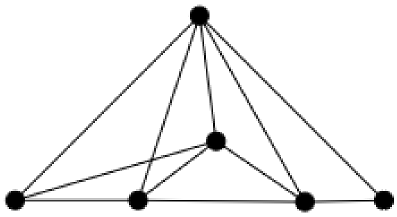
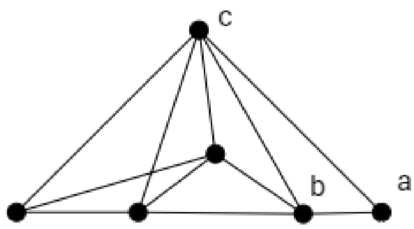
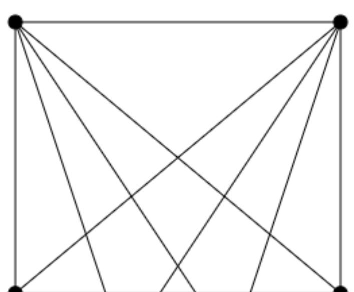
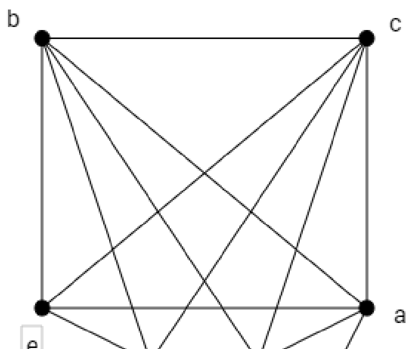
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>Доказательство аналогично предыдущему.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Лемма: если в графе H имеется две вершины степени 5 и одна вершина степени 2, то для такого графа невозможно построить локально-1-H-совершенный граф.
Доказательство: Рассмотрим следующий граф, у которого две вершины степени 5 (b и c) и одна вершина степени 2 (a). Для того, чтобы H(a) был достроенным, необходимы три вершины (x, y, z) смежные с a, причём в H(a) должна найтись ещё одна вершина степени 5, кроме a, что невозможно, так как H(b) и H(c) – достроенные.


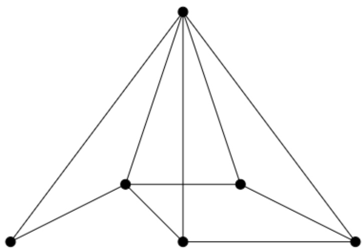
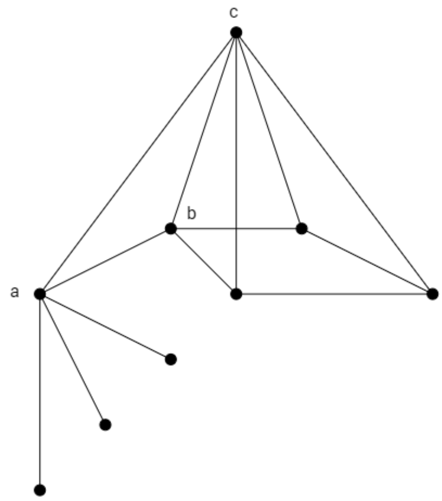
Под категорию таких графов попадает 4 графа H:



</td>
</tr>
</table>

		Для того, чтобы *H(a)* был достроенным, необходима вершина *b*, имеющая степень как минимум 3 в *H(a)* и несмежная с вершинами *c* и *d* (*c* и *d* имеют степень 4 в *H(a)*). Отсюда однозначно определятся вершины, смежные с *b* (см. рис). Проведя аналогичные рассуждения для *H(c)* получаем, что пара вершин отличных от a и смежных с *b* будет иметь степень 6 в исходном графе, что невозможно.
		Чтобы *H(a)* был достроенным необходимы две вершины *b* и *c* смежные с *a*. Заметим, что в *H(a)* можно провести ещё только 3 ребра так, чтобы в исходном графе вершины имели степень не выше 5, а отсюда следует, что в *H(a)* не будет двух вершин степени 4, а значит, *H(a)* не может быть достроенным.
		Чтобы *H(a)* был достроенным нужна вершина c, смежная с *a* и *b*. В *H(b)* вершины *d* и *a* имеют степень 3 и они при этом смежные, а так как в *H* обе смежные вершины степени 3 смежны с вершинами степени 4 и 5, то вершины d и a должны быть смежны с вершиной степени 4 в H(b), что невозможно.

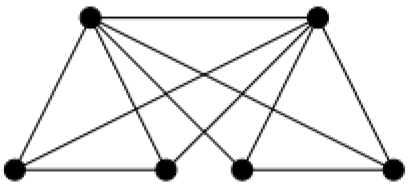
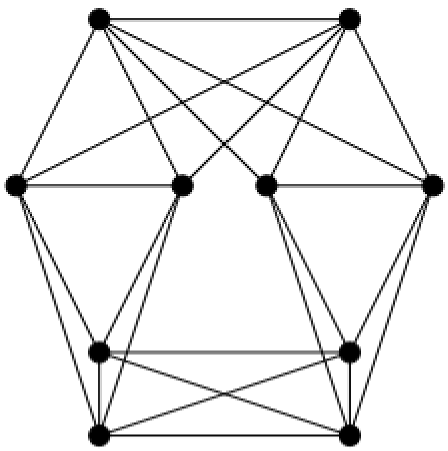
		Степенная последовательность H (2,2,3,4,4,5). Чтобы $H(a)$ был достроенным нужны три вершины смежные с a и не смежные с b, так как если такое произойдёт, то в $H(b)$ будет только одна вершина степени 2. Тогда вершины b и c в $H(a)$ будут иметь степень 2 и будут смежными, а значит, $H(a)$ не будет достроенным.
		Рассмотрим $H(a)$. Вершина c в нём имеет степень 2, а так как единственная смежная с ней вершина из $H(a)$, кроме a, вершина b, то она в $H(a)$ имеет степень 4, что невозможно, так как в таком случае вершина b будет иметь степень 6 в исходном графе.
		Заметим, что для того, чтобы $H(c)$ и $H(b)$ были достроенными, нужны вершины d и e, смежные с b и c соответственно. Чтобы $H(a)$ был достроенным нужны вершины p, q, смежные с a. Вершины b и c в $H(a)$ имеют степень 2, а значит, какая-то из этих вершин должна быть смежна ещё с какой-то вершиной из $H(a)$, что невозможно, так как в таком случае степень одной вершины из $\{b, c\}$ в исходном графе будет равна шести.

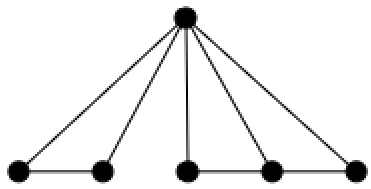
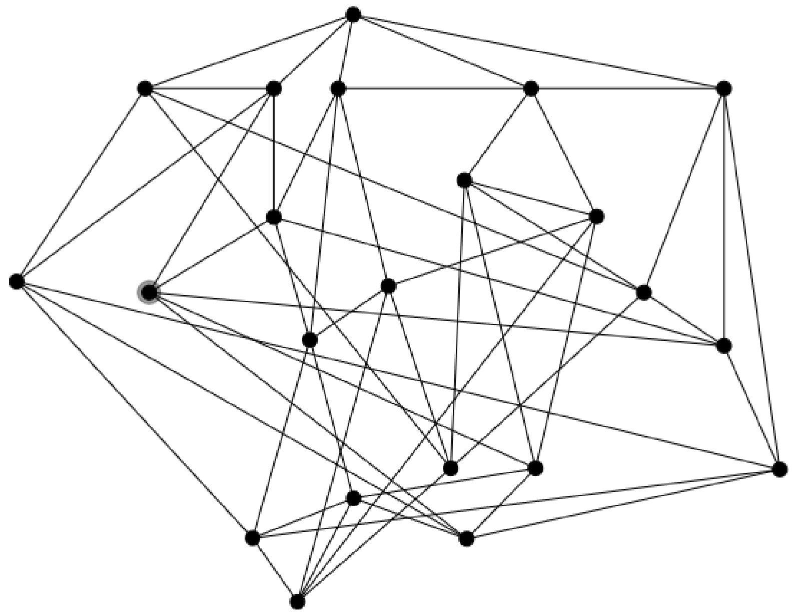
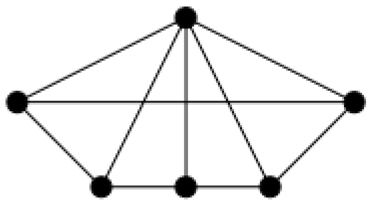
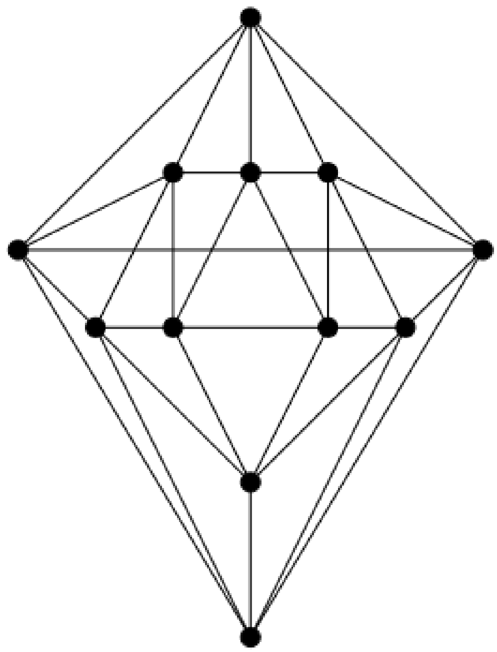
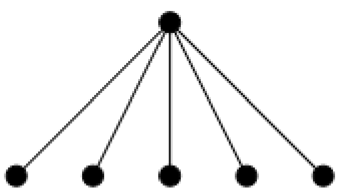
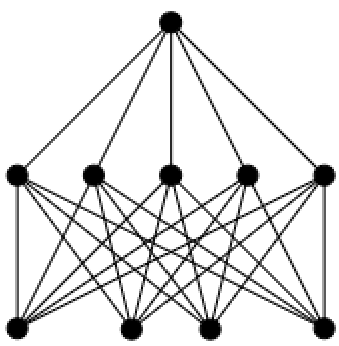
		Для того, чтобы *H(b)* был достроенным нужна вершина, смежная с *b* и не смежная с *a*. Рассмотрим *H(a)*. В нём вершины *c* и *b* имеют степень минимум 2, а так как в *H* только одна вершина степени 2, то какая-то вершина из *{c, b}* должна быть смежна ещё хотя бы с одной вершиной, что невозможно, так как тогда у какой-то вершины из *{b, c}* будет степень 6 в исходном графе.
		Чтобы *H(a)* был достроенным нужна вершина *d*, смежная с *a* и *c*. Тогда рассмотрим *H(c)*. Вершины *b* и *a* в нём имеют степень минимум 3, а значит, одна должна иметь степень 4, что невозможно, так как тогда какая-то вершина из *{a ,b}* будет иметь степень 6 в исходном графе.
		Чтобы *H(b)* был достроенным, нужна вершина *c*, смежная с *b* и несмежная с *a*. В *H(a)* должна быть вершина степени 4, что невозможно, так как она должна быть смежная с какой-то вершиной из *{b, d}*, либо это будет сама вершина из *{b, d}*. Но тогда у какой-то вершины из *{b, d}* будет степень выше 5 в исходном графе.

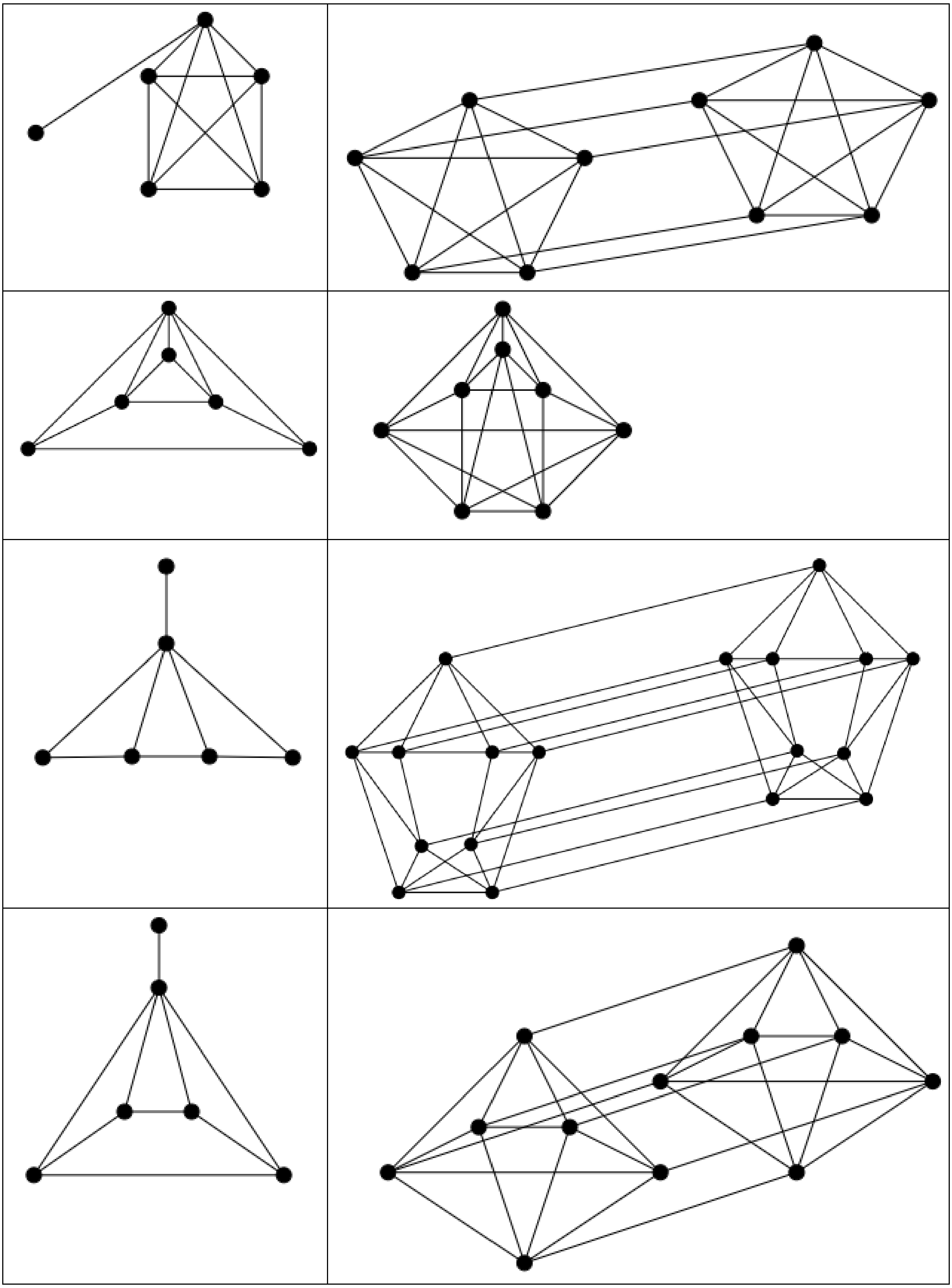
		Степенная последовательность *H* (1, 1, 2, 2, 3, 5). Чтобы *H(a)* был достроенным, необходимы вершины *e, d,* смежные с *a* и не смежные с *c*. Чтобы *H(c)* был достроенным, необходимы 3 вершины *t, p* и *q*, причём какая-то из них должна иметь степень 3, а две другие степень 1 в *H(c),* так как *H(a)* и *H(b)* достроенные и вершины *a* и *b* в *H(c)* имеют степень 2. Но это невозможно, так как вершины *a* и *b* не могут быть смежными с вершинами *t, p* и *q*.
		Рассмотрим *H(a)*. Вершина с в нём имеет степень два и *H(c)* достроенный, а вершина *b* имеет степень 2, но чтобы *H(b)* был достроенным нужна только 1 вершина не из *H(c),* откуда следует что максимальная степень вершины *b* в *H(a)* равна трём. Заметим, что в *H* вершины степени 2 и 3 несмежны, а в *H(a)* они смежны – противоречие.
		Рассмотрим *H(a)*. Вершины *b* и *c* имеют в нем степень 4, а во всем графе их степень 5, т.е. их степень в *H(a)* в точности 4. Также должна найтись вершина *d*, смежная с *a*. тогда в *H(a)* среди вершин *e, f, d* есть вершина степени 5 (и это не *d*). Тогда либо вершина *e* смежна с *f* и

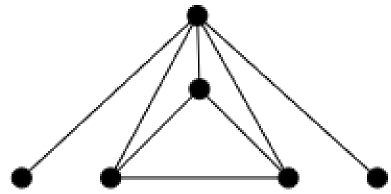
		d, либо *f* смежна с *e* и *d*, но в графе *H* вершины *e* и *f* не смежны. Противоречие.
		Рассмотрим *H(a)*. В исходном графе вершина *c* имеет степень 5, а вершина *b* степень 4. Тогда в *H(a)* степень с равна 2, а степень *b* не превосходит 3. Однако, в исходном графе только одна вершина степени 2, а также вершина степени 2 не смежна с вершиной степени 3. Противоречие.

Далее рассмотрим те графы *H*, для которых можно построить локально-1-*H*-совершенный граф. В первом столбце таблицы граф *H*, во втором столбце локально-1-*H*-совершенный граф.

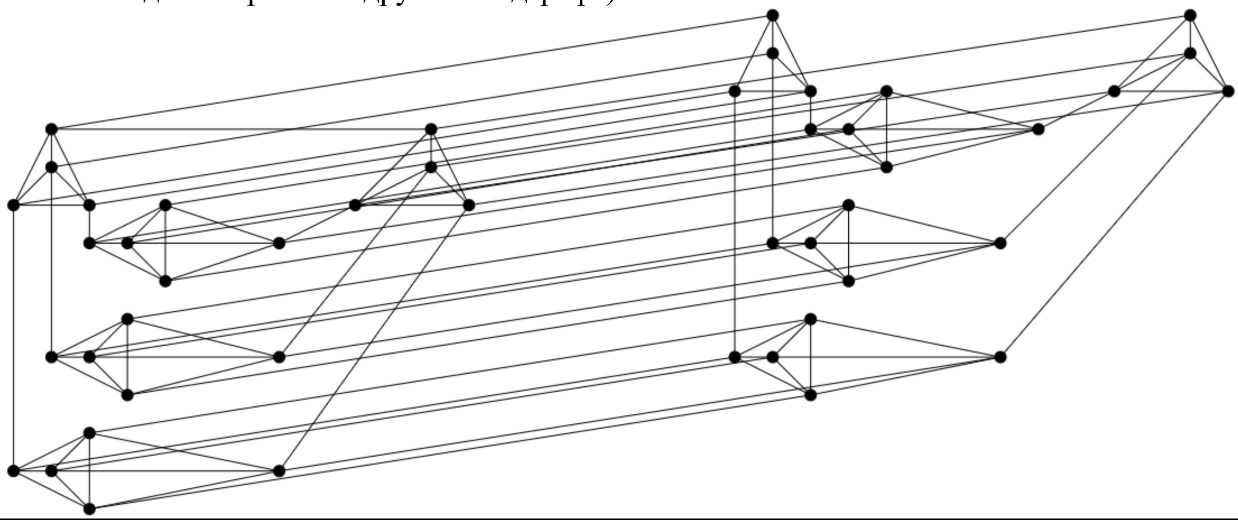
	

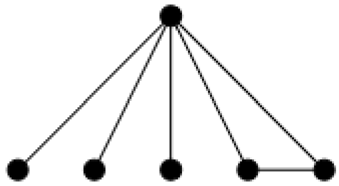
	
	
	

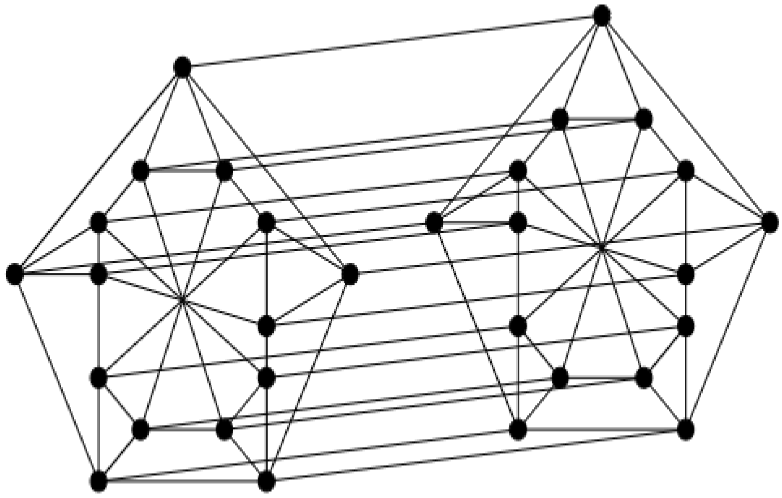


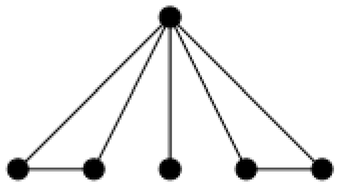


Пример (В графе можно выделить два одинаковых подграфа, в которых каждая вершина смежна с одной вершиной другого подграфа):

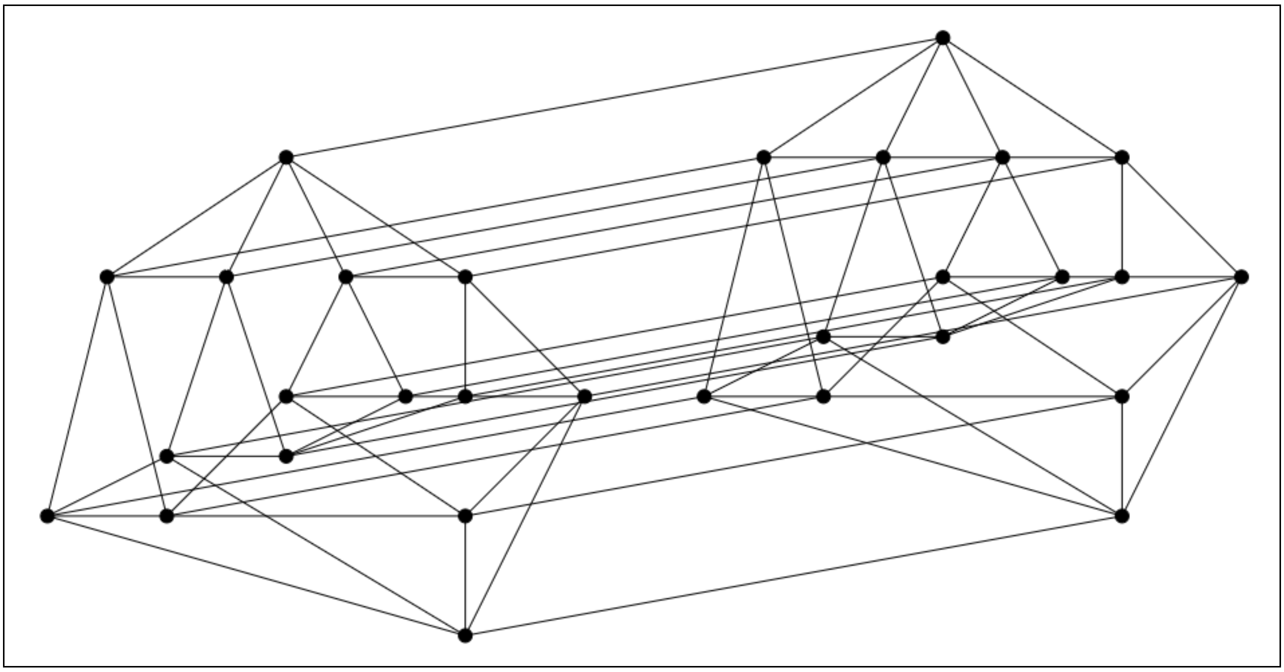








Пример (В графе можно выделить два одинаковых подграфа, в которых каждая вершина смежна с одной вершиной другого подграфа):



Осталось 2 графа *H*, которые мы не исследовали: