XVIII Республиканский Турнир Юных Математиков
Минск, 2016

Команда 41-1
Задача 10
«Локальная схожесть графов»

Автор:
Василевский Алексей,
11 класс,
Гимназия №41 имени Серебряного В.Х.

Аннотация:
Решены пункты 0-2,4 исходной постановки, исследован пункт 5 исходной постановки.
Для некоторых случаев использованы более общие идеи, чем подразумевалось в постановке.

Условие задачи

В задаче рассматриваются простые графы и используются общепринятые понятия теории графов (см., например [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.]).

Граф с n вершинами называется *помеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два помеченных графа считаются равными, если множества вершин и рёбер у них совпадают. Два графа называются *изоморфными*, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором графе и наоборот. Изоморфные графы естественно отождествлять, т. е. считать совпадающими, и говорить о них как об *абстрактном графе*. Можно также считать, что абстрактный граф получается из помеченного графа опусканием пометок.

Подграф H графа G называется *подграфом, порожденным множеством вершин* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит только вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все рёбра графа G, соединяющие эти вершины. Для графа G и целого числа $k \geq 1$ обозначим через $N_k(G)$ мультимножество, в котором каждой вершине v графа G соответствует подграф графа, порождённых всеми вершинами на расстоянии не более k от v (считаем, что любая вершина графа отстоит от самой себя на расстояние 0). В качестве примера рассмотрим граф G на рис. 1. Для удобства вершины графа помечены, но сам он мыслится как абстрактный. Соответствующие мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$ имеют вид, представленный на рис. 2.

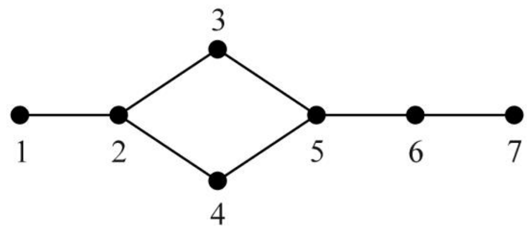


Рис. 1 к задаче № 10. Граф G

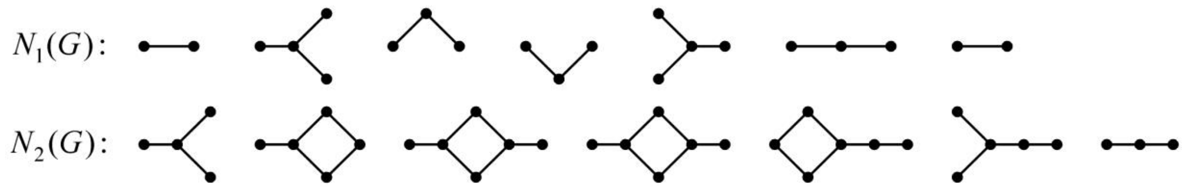


Рис. 2 к задаче № 10. Мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$

Для целого числа $k \geq 1$ назовём два абстрактных графа G и H *локально-k равными*, если совпадают мультимножества $N_k(G)$ и $N_k(H)$. *Локально*-0 *равными* назовём графы, у которых совпадают степенные последовательности. Два локально-k равных для целого неотрицательного числа k графа назовём *локально схожими порядка* k (или просто *локально схожими*). Если все подграфы из $N_k(G)$ попарно изоморфны одному и тому же графу H, то граф G назовём *локально-k-H совершенным*.

Исследуйте следующие задачи.

0.0. Верно ли, что два графа изоморфны, если совпадают их степенные последовательности?

0.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа.

0.2. Перечислите все попарно неизоморфные графы с числом вершин меньше 6 и исследуйте их на локальную схожесть. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3, 3) и обоснуйте, что других таких графов нет.

1.0. Верно ли, что из локально-1 равенства следует изоморфизм графов? Верно ли, что из локально-1 равенства следует локально-0 равенство?

1.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа. Приведите ответ на этот вопрос при условии, что рассматриваемые графы являются связными.

1.2. Пусть G_1 и G_2 – два локально-1-H совершенных графа с одинаковым числом вершин. Следует ли отсюда изоморфизм графов G_1 и G_2? Найдите граф H с наименьшим числом вершин, для которого существуют два локально-1-H совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин.

2. Верно ли, что для какого-либо целого неотрицательного числа k из локально-k равенства графов следует их изоморфизм? Приведите соответствующие контрпримеры. Исследуйте этот же вопрос в классе связных графов.

3. Верно ли, что из локальной схожести какого-либо порядка следует локальная схожесть меньших порядков? Верно ли, что если два графа локально схожи, то локально схожи и их дополнения?

4. Попробуйте найти все графы H с числом вершин меньше 7, для которых существуют локально-1-H совершенные графы.

5. Пусть $\xi(k)$ – наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-k равных неизоморфных графа; $\psi(k)$ – то же для связных графов. Найдите значения ξ и ψ для некоторых k. Попытайтесь оценить величины ξ и ψ и исследуйте точность своих оценок.

Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

Исследование задачи

Будем называть подграф графа G, порождённый всеми вершинами графа G, удаленными не более, чем на k, от вершины A графа G, k-подграфом вершины A.

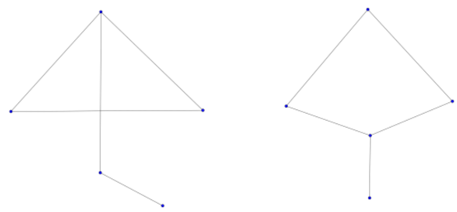
Треугольником в графе будем называть совокупность трёх вершин, соединённых рёбрами.

Пункт 0.

0.0. Верно ли, что два графа изоморфны, если совпадают их степенные последовательности?
0.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа.

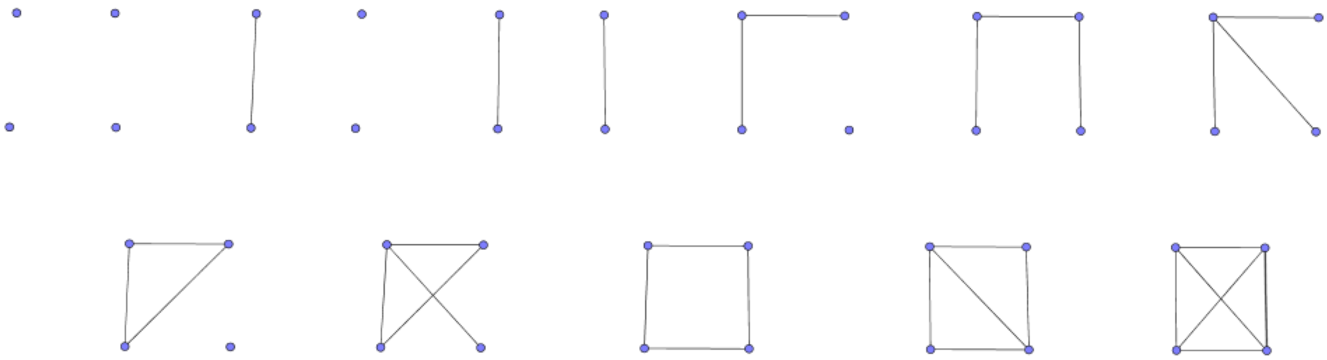
Лемма 1.
Количества вершин двух локально-k равных графов равны.
Доказательство:
Пусть данные графы — G_1 и G_2.Заметим, что мощности множеств $N_k(G_1)$ и $N_k(G_2)$ равны количеству вершин в графах G_1 и G_2 сответственно. Т.к. множества совпадают, то их мощности равны.

Лемма 2.
Наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа, равно пяти.
Доказательство:
Пример для пяти вершин:



Заметим, что если существуют два локально-0 равных неизоморфных графа с числом вершин k, то локально-0 равных неизоморфных графа с числом вершин $k + 1$, т.к. для их построения достаточно добавить к каждому из первой пары графов вершину, соединённую со всеми.

Поэтому достаточно показать, что не существует двух локально-0 равных неизоморфных графов с числом вершин 4.



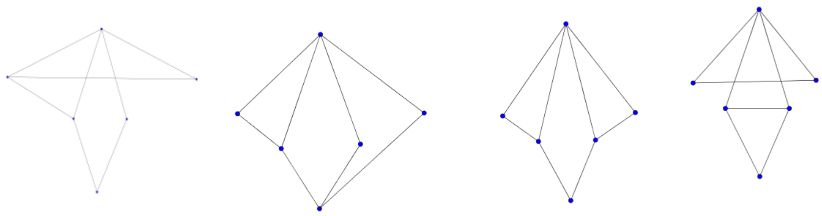
На рисунке представлены все графы на четырёх вершинах, несложно убедиться, что их степенные последовательности попарно различны.

Следствие 1.
Для любого $n \geq 5$ *существует пара локально-*0 *равных неизоморфных графов на* n *вершинах.*

Доказательство:
Для построения искомой пары графов достаточно добавить $n-5$ вершин, соединённых с висячей вершиной каждого из графов из примера из Леммы 2.

0.2.Перечислите все попарно неизоморфные графы с числом вершин меньше 6 и исследуйте их на локальную схожесть. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3, 3) и обоснуйте, что других таких графов нет.

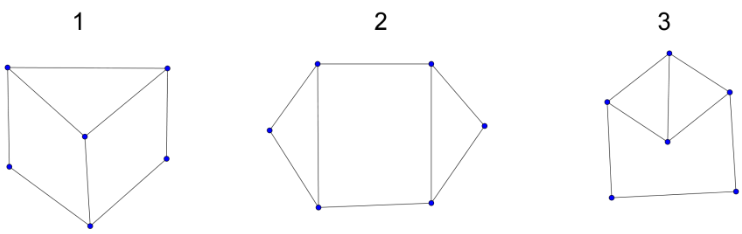
Покажем далее, что количество попарно неизоморфных графов со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4) равно 4.



Рассмотрим вершину A степени 4. Мы имеем два варианта степени вершины B, не смежной с этой. Если она равна 3, то тогда рассмотрим единственную вершину, смежную с A и не смежную с B. Она должна быть смежной с одной из трёх нерассмотренных вершин, причём заметим, что больше рёбер не будет, т.к. мы уже будем иметь две вершины степени 3. Если степень вершины B равна 2, то рассмотрим две смежные с ней вершины. Если они смежны, то они уже имеют степень три. Поэтому нерассмотренные вершины будут иметь степень два, и они должны быть смежны друг с другом, из-за того что остальные вершины уже имеют степени 2,3,3,4. Если же две смежных с B вершины несмежны, то, рассматривая два варианта смежности двух ещё нерассмотренных вершин, мы получим два оставшихся графа.

Теперь покажем, что количество попарно неизоморфных графов со степенными последовательностями (2, 2, 3, 3, 3, 3) равно 3.

Рассмотрим пару смежных вершин A и B степени 3 (она найдётся, так как вершин, не смежных с данной вершиной степени 3, только две, а всего в графе четыре вершины степени 3).
Если они смежны с попарно различными вершинами, то при удалении этих двух вершин мы получим граф, имеющий степенную последовательность $(1,\ 1,\ 2,\ 2)$, то есть цепь на четырёх вершинах. Среднее ребро этой цепи может иметь вершины, смежные с одной и той же вершиной из A, B, что даст граф 1 с рисунка, либо смежные с разными вершинами. В этом случае крайние рёбра этой цепи могут иметь вершины, смежные с одной и той же вершиной из A, B, что даст граф 2 с рисунка, либо с разными, что даст опять же граф 1.



Если вершины A и B смежны с одними и теми же вершинами, то оставшиеся вершины будут иметь степень 2, т.к. в ином случае между уже рассмотренными четырьмя вершинами и оставшимися двумя было бы не менее трёх рёбер, откуда мы бы получили, что хотя бы одна из четырёх рассмотренных вершин имела бы степень не менее четырёх. Значит, они имеют степень два, и по аналогичным рассуждениям смежны между собой и с двумя вершинами из четырёх рассмотренных, причём это не вершины A и B. Это даёт нам граф 3 с рисунка.

Остаётся случай, когда вершины A и B смежны с одной и той же вершиной C, и вершина A также смежна с вершиной D, вершина B с вершиной E. Если оставшаяся вершина F имеет степень 3, то это уже однозначно определит все рёбра, т.к. она несмежна с вершинами A и B. Это даст граф 1 с рисунка. Пусть вершина F имеет степень два. Если эта вершина смежна с вершинами D и C (либо E и C, эти случаи симметричны). Мы получим, что вершина C уже имеет степень три, поэтому вершина E может быть смежной только с вершиной D. Это опять же даст нам граф 1. Если же вершина F смежна с вершинами D и E, то мы получим, что оставшееся ребро может соединять вершины E и D, вершины E и С, либо вершины С и D. Первый случай даст нам граф 2, остальные – граф 3.

Пункт 1.

1.0. Верно ли, что из локально-1 равенства следует изоморфизм графов? Верно ли, что из локально-1 равенства следует локально-0 равенство?
1.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа. Приведите ответ на этот вопрос при условии, что рассматриваемые графы являются связными.
1.2. Пусть G_1 и G_2 – два локально-1-H совершенных графа с одинаковым числом вершин. Следует ли отсюда изоморфизм графов G_1 и G_2? Найдите граф H с наименьшим числом вершин, для которого существуют два локально-1-H совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин.

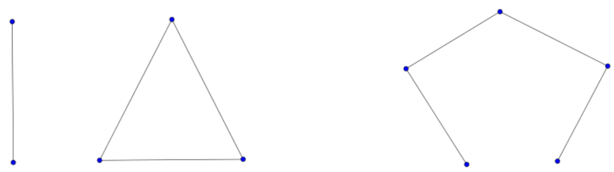
Лемма 3.
*Из локально-*1 *равенства двух графов следует их локально-*0 *равенство.*

Доказательство:
Рассмотрим мультимножества $M_1(G_1)$ и $M_1(G_2)$, образованные мощностями элементов из мультимножеств $N_1(G_1)$ и $N_1(G_2)$ соответственно. Т.к. $N_1(G_1)$ и $N_1(G_2)$ совпадают, то совпадают и $M_1(G_1)$ и $M_1(G_2)$. Заметим, что количество вершин в подграфе, образованном вершинами, удалёнными не более чем на 1 от вершины A, равно степени вершины A плюс 1. Из этого следует, что мультимножество $M_1(G_1)$ строго задаёт степенную последовательность графа G_1, откуда получим, что степенные последовательности графов G_1 и G_2 совпадают.

Следствие 1.
Наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа, равно шести.

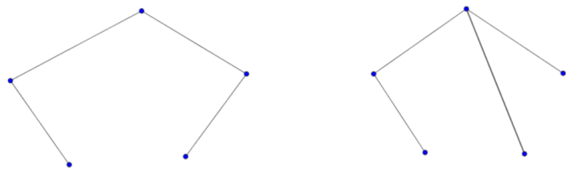
Доказательство:
Если бы нашлись два локально-1 схожих графа на 4 или менее вершинах, то по Лемме 3 они были бы и локально-0 схожими, что невозможно по Лемме 2. Покажем, что не будет двух таких графов на пяти вершинах.
Пусть искомая пара графов найдётся. Заметим, что из Леммы 3 количества рёбер в этих графах равны. Тогда в этих графах не будет вершин степени 0 или 4, т.к. при удалении первых вершин локально-1 равенство сохраняется, а рассмотрение 1-подграфов вторых дало бы пару изоморфных

подграфов этих графов, построенных на пяти вершинах, то есть самих этих графов. Если же один из этих графов не связен, то количества вершин в его компонентах будет равны 2 и 3, и получим два варианта графов, их степенные последовательности будут (1,1,1,1,2) и (1,1,2,2,2). Нетрудно заметить, что первая последовательность будет строго задавать граф, вторая же будет задавать два графа, которые не является локально-1-равными.

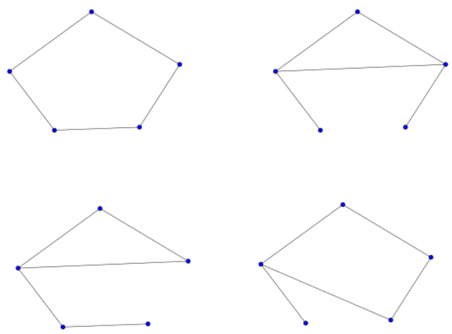


Осталось рассмотреть случай пары смежных графов, не имеющих вершины степени 4.
Тогда количество рёбер в нём не меньше, чем, и не больше, чем 7(Т.к. сумма степеней вершин не превосходит 3*5= 15).

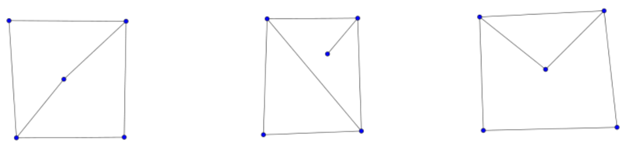
Заметим, что существует лишь два графа из рассматриваемых, построенных на четырёх вершинах, однако они не являются локально-1-равными (такой граф будет деревом, причём либо он будет цепью, либо будет иметь вершины степени три).



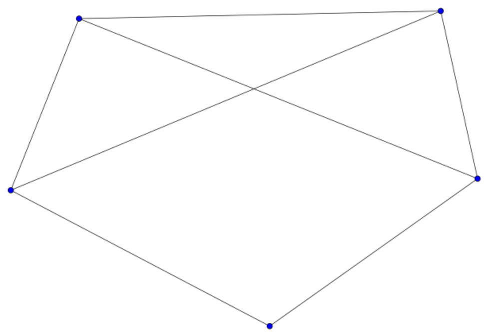
Получим также четыре графа из рассматриваемых, имеющих пять рёбер, они также попарно не являются локально-1-равными (Либо там не будет вершины степени 3, либо она будет, и оставшаяся вершина будет смежна с одной из этих трёх, варианты расположение оставшегося ребра даст три графа).



Аналогично получим три графа из рассматриваемых, имеющих шесть рёбер, которые также будут не будут локально-1-равными.



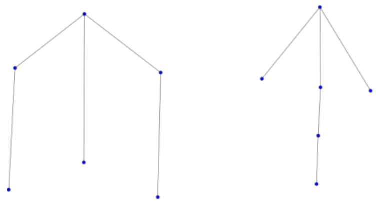
Покажем,что будеь ровно граф из рассматриваемых, имеющих семь рёбер Покажем что такой граф только один. Если в нём не более трёх вершин имели бы степень три, то число рёбер в нём было бы не большим, чем $\frac{(3*3+2*2)}{2}$, то есть не большим чем шесть. Поэтому четыре вершины данного графа имеют степень три. Аналогично, пятая вершина имеет степень 2. Любая пара смежных вершин этого графа степени три, имеет вершину, смежную с ними обоими, т.к. в ином случае таком графе оказалось уже не менее чем 6 вершин. Таких пар не менее двух ,т.к. любая из вершин степени 3 смежна хотя бы с одной вершиной степени 3. Отсюда вытекает, что в данном графе есть треугольник, построенный на трёх вершина степени три, т.к. в ином случая мы бы рассмотрели две



пары смежных вершин степени три, вершина степени два была бы смежна с каждой из вершин этих пар, то есть имела бы степень, не меньшую, чем три. Заметим, что из вершин этого треугольника, к оставшимся двум вершинам выходит три ребра. Если бы они выходили к одной и той же вершине то вторая имела бы степень 0. Значит, два из них идут к одной вершине, а оставшееся – к другой. Так как любая вершина имеет степень, не меньшую, чем два, то вторая смежна ещё с одной вершиной. Это не могут быть вершины того треугольника, т.к. они бы имели уже степень 4, значит это первая вершина. Заметим, что мы уже однозначно определили все семь рёбер, а значит и этот граф.

Из вышеописанного получим, что двух локально-1-равных графов на пяти вершинах не будет.

Пример для шести вершин приведён справа, также несложно убедиться, что их графы-дополнения представленных не будут локально-1 схожими.



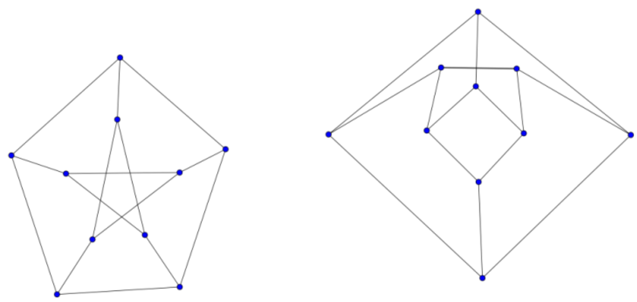
Лемма 4.

Наименьшее число вершин, для которого существует граф H с данным числом вершин, для которого существуют два локально-1-H совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин, равно 3 *при условии, что данные два графа необязательно являются связными и* 4 *в обратном случае.*

Доказательство:

Случаи для двойки и единицы тривиальны. Если два искомых графа необязательно являются связными, то в качестве примера можно взять цикл на восьми вершинах в качестве одного графа и два цикла на четырёх в качестве другого. Несложно заметить, что оба этих графа являются локально-1-H совершенными, где H- цепь на трёх вершинах.

Тогда два искомых графа обязательно являются связными. Покажем, что граф H не может иметь 3 вершины. Заметим, что у нас есть всего два возможных графа H. Если два графа будут локально-1-H совершенными, где H- цепь на трёх вершинах, то каждый из них будет циклом на соответственном ему числе вершин, откуда по лемме 1 следует изоморфность. Если же H- граф треугольник, то искомые два графа будут изоморфны ему. Пример для четырёх вершин показан на рисунке.



Пункт 2.

2. Верно ли, что для какого-либо целого неотрицательного числа k из локально-k равенства графов следует их изоморфизм? Приведите соответствующие контрпримеры. Исследуйте этот же вопрос в классе связных графов.

Теорема 1.

Если существуют два неизоморфных связных локально-0 равных графа, построенных на n вершинах и имеющих t рёбер, то $\forall k \geq 2$ *существуют и два неизоморфных связных локально-*k *равных графа, построенных на n+t(2k-1) вершинах и имеющих 2kt рёбер.*

Доказательство:

Рассмотрим два локально-0 равных графа G_1 и G_2. Заменим каждое ребро в каждом из графов на цепочку из $2k-1$ вершин, получим графы G_3 и G_4 (в них будет $n+t(2k-1)$ вершин и $2kt$ рёбер). Построим биекцию между множествами $N_k(G_3)$ и $N_k(G_4)$. Разобьём на пары вершины графов G_1 и G_2: в каждую пару пусть входит по одной вершине из этих графов, степени которых в соответственных графах равны. Для любой такой пары рассмотрим пару вершин из графов G_3 и G_4, соответствующих им (то есть те вершины, от которых исходят цепочки рёбер, соответствующие рёбра, исходящим из вершин рассматриваемой пары в графах G_1 и G_2). Рассмотрим соответственно k-подграфы данных вершин. Они оба будут представлять собой вершину, от которой исходит t цепочек длины k, где t – степень данных вершин в графах G_1 и G_2, то есть будут изоморфны. Теперь рассмотрим по t вершин графов G_3 и G_4, удалённых от рассматриваемой пары на число i, где $1 \leq i \leq k-1$. Нетрудно заметить, что все k-подграфы данных вершин будут представлять собой вершину, с которой смежны t цепей длины $k-i$, и одна цепь длины $k+i$, то есть это принесёт в множества $N_k(G_3)$ и $N_k(G_4)$ по t попарно изоморфных графов. Рассмотрим так все вершины для каждого i. И рассмотрим все пары вершин в графах G_1 и G_2. Заметим, что мы рассмотрели по одному разу k -подграф каждой вершины из G_3 и G_4, кроме середин цепочек из $2k-1$ вершин. Однако k-подграф каждой такой вершины является цепью на $2k-1$ вершин, и всего количество таких вершин в графах G_3 и G_4 равно количеству рёбер в графах G_1 и G_2 соответственно, а эти количества равны, т.к. они равны сумме степеней вершин графов G_1 и G_2, делённой на два. Значит, множества $N_k(G_3)$ и $N_k(G_4)$ совпадают. Заметим также, что если G_1 и G_2 были неизоморфными, то и G_3 и G_4 будут неизоморфными. Значит, G_3 и G_4 – искомая пара графов.

Следствие 2.

Для любого k *существуют два локально -равных неизоморфных графа, построенных на* $10k$ *вершинах(из Теоремы* 1 *и примера из Леммы* 2*).*

Лемма 5.

Для любого натурального k существует пара k-совершенных неизоморфных графов, построенных на $4k + 4$ вершинах.

Доказательство:

Рассмотрим граф-цикл на $4k + 4$ вершинах и граф, состоящий из двух циклах на $2k + 2$ вершинах. Тогда k-подграф каждой из вершин обоих графов будет представлять собой цепь на $2k + 1$ вершинах.

Пункт 4.

4. Попробуйте найти все графы H с числом вершин меньше 7, для которых существуют локально-1-H совершенные графы.

Заметим, что любой граф, являющийся элементом мультимножества $N_1(G)$ какого-либо графа G, имеет вершину, соединённую со всеми остальными. Любой граф H, имеющий такую вершину, назовём *хорошим*, если существует локально-1-H совершенный граф. Иначе такой граф назовём *плохим* (далее в этом пункте мы будем рассматривать по понятным причинам только графы H, имеющие вершину, соединённую со всеми остальными вершами графа H).

Одну из вершин, соединённых со всеми остальными, назовём. Остальные вершины, соединённые со всеми вершинами графа H, назовём сильными. Все оставшиеся вершины назовём слабыми.

Лемма 6.

Если граф H- полный, то он хороший, и существует ровно один связный локально-1-H совершенный граф – граф H.

Доказательство:

Рассмотрим любой полный граф H (пусть построенный на n вершинах). Заметим, что граф H-локально-1-H совершенный. Пусть есть ещё связный локально-1-H совершенный граф H'. Рассмотрим в нём подграф, изоморфный графу H. Рассмотрим в нём любую вершину, если она связна с какой-либо вершиной помимо вершин этого подграфа, то её степень будет уже не менее, чем n. И её 1-подграф будет иметь минимум $n + 1$ вершину, противоречие. Отсюда получим, что в графе H' помимо вершин данного подграфа других вершин не будет, то есть он будет изоморфен графу H.

Лемма 7.

Если графы H_1 и H_2 – хорошие, то граф H', получаемый путём соединения каждого ребра подграфов графов H_1 и H_2, получаемых удалением из них корневых вершин соответственно, с новой вершиной, также является хорошим.

Доказательство:

Построим локально-1-H' совершенный граф. Для этого рассмотрим любой локально-1-H_1 совершенный граф G_1 (пусть его мощность n), и любой локально-1-H_2 совершенный граф G_2, они обязательно будут существовать. Рассмотрим граф G', образованный n графами, изоморфными G_2, любые n соответственных вершин которых соединены рёбрами так, чтобы образовывать граф G_1. Несложно видеть, что он 1-H' совершенный.

Лемма 8.

Не существует хороших графов на 5 *или менее вершинах, не являющихся полными и имеющих сильную вершину.*

Доказательство:

Рассмотрим любой такой граф H (пусть в нём имеется n вершин), и любой его локально-1-H совершенный граф G. Рассмотрим в этом графе подграф, изоморфный графу H(пусть корневой вершине в нём соответствует вершина B графа G). Рассмотрим в этом подграфе любую из вершин, которая не соединена со всеми вершинами этого подграфа (пусть вершину A) и 1-подграф вершины A. В него будет входить вершина, не принадлежащая 1-подграфу вершины B. Рассмотрим вершину в этом подграфе, соответствующую одной из сильных вершин графа H. Заметим, что это будет вершина, входящая в 1-подграф вершины B, т.к. она смежна с ней.

Также заметим, что это не будет вершина, соответствующая сильной вершине 1-подграфа вершины A, т.к. мы бы получили из вышеописанного, что она имеет степень уже не менее чем n, чего быть не может (т.к. в 1-подграфе этой вершины было бы уже не менее чем $n + 1$ вершина).

Таким образом мы получим, что в графе H каждая слабая вершина будет смежна с не менее, чем ещё одной слабой вершиной. Несложно убедиться, что таких графов с числом вершин не выше 5, не существует.

Следствие 3.

Также не существует хороших графов, полученных аналогично графу H' из леммы 7*, где один из графов H_1 и H_2 является неполным графом на не более чем* 5 *вершинах, в котором есть сильная вершина.*

Доказательство:

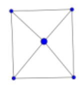
Рассмотрим любой такой граф H', который является хорошим, и любой локально-1-H' совершенный граф G'. Пусть графом на не более чем 5 вершинах, в котором есть сильная вершина, является, без ограничения общности, H_1. Пусть мощность графа H_1 равна n_1, мощность графа H_2 равна n_2(мощность H' будет равна $n_1 + n_2 - 1$). Нам достаточно показать, что и в этом случае также любая слабая вершина графа H_1 также должна быть смежна хотя бы с одной из слабых вершин. Рассмотрим в графе G'подграф, изоморфный графу H'(пусть корневой вершине в нём соответствует вершина B графа G). Рассмотрим в этом подграфе любую из вершин, соответствующую слабой вершине графа H_1(пусть A) и её 1-подграф. Заметим, что не менее, чем n_2 вершин этого подграфа не будут принадлежать 1-подграфу вершины B (Т.к. вершина A несмежна с любой вершиной, соответствующей некорневой вершине графа H_2 и хотя бы одной из графа H_1). Рассмотрим вершину

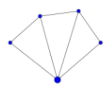
1-подграфа вершины A, соответствующую сильной вершине графа H_1. Т.к. она связна со всеми вершинами, смежными с A, то она смежна с вершинами B и вершиной, соответствующей сильной вершине графа H_1 1-подграфа вершины B, поэтому она будет соответственна вершине графа H_1 1-подграфа вершины B. Заметим, что она не будет вершиной B, т.к. мы бы нашли ещё одну вершину, смежную с B. Остаётся показать, что она не будет вершиной, соответственной сильной вершине графа H_1. Пусть это так. Заметим, что в этом случае она будет иметь степень в графе G' не менее чем $n_1 - 1 + n_2$ (вершины графа H_1 и новые n вершин). Мы получим, что в 1-подграфе этой вершины будет не менее, чем $n_1 + n_2$ вершин. Противоречие. Значит, такого хорошего графа H' не существует.

Следствие 4.

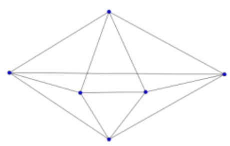
В любом хорошем графе, имеющем сильную вершину, любая слабая вершина смежна с хотя бы ещё одной слабой вершина, причём эта слабая вершина смежна со всеми теми же слабыми вершинами, что и первая (также это верно для части графа из следствия 3).

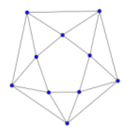
Перейдём к описанию множества хороших графов, построенных на не менее чем шести вершинах. Покажем, что следующие два графа являются похожими, приведя соответствующие им локально-1-совершенные графы:





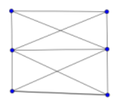
Заметим, что любой граф, с числом вершин, не большем, чем 5, будет либо хорошим по лемме 7 (с уже полученным набором хороших графов из леммы 6 и рисунка справа), либо плохим по лемме 8 либо следствию 3.

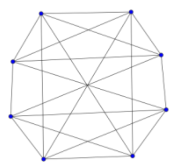




Будем далее рассматривать графы, построенные на 6 вершинах. Заметим, что все такие графы, что при удалении из них корневой вершины они становятся несвязными, будут хорошими либо плохими по леммам 7 , 8 и следствию 3.

Рассмотрим графы с сильной вершиной. Из следствия 4, мы получим только один граф, который является хорошим (если слабых вершин две, то они будут соединены, т.е. граф будет полным, если три, то также, если четыре, то если у какая-то слабая вершина будет смежна с двумя, то будет треугольник на них, и т.к. с четвёртой соединена хоть одна из них, то она уже будет сильной, поэтому каждая из слабых вершин будет смежна ровно с одной из слабых).





Нам осталось рассмотреть графы, построенные на шести вершинах, такие, что при удалении из них корневой вершины со всеми из неё выходящими рёбрами остаётся связный граф.

Далее при доказательствах того, что граф H плохой, будет предполагать, что существует его локально-1-H совершенный граф G, и будем рассматривать его 1-подграф каждой вершины, вершины которого пронумерованы, как 1,2,3,4,5,6 , как на рисунке. Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 9.

Если какая-либо вершина A графа H(из рассматриваемого множества графов) имеет степень 2 (смежна с корневой и вершиной B), то в для данного подграфа графа G есть вершина C графа G такая, что вершины C и вершины, соответствующие вершинам A и B формируют треугольник.

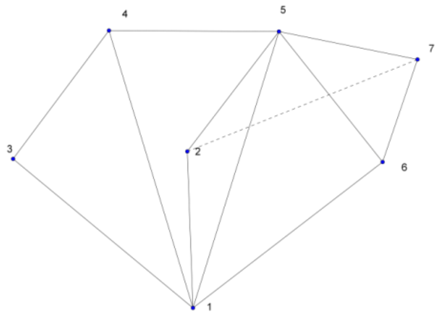
Доказательство:

Рассматривая 1-подграф графа G вершины, соответствующей B, мы получим, что с есть 4 смежных с ней вершин, не принадлежащих первому подграфу. Исходя из классификации оставшихся графов, мы получим, что найдётся хотя бы одна вершина C из них, смежная с теми, что принадлежат изначальному подграфу и 1-подграфу вершины изначального подграфа, соответствующей A. Т.к. вершина, соответствующая корневой изначального подграфа, не может быть смежной с иными вершинами, то получим, что смежна будет вершина, соответствующая B.

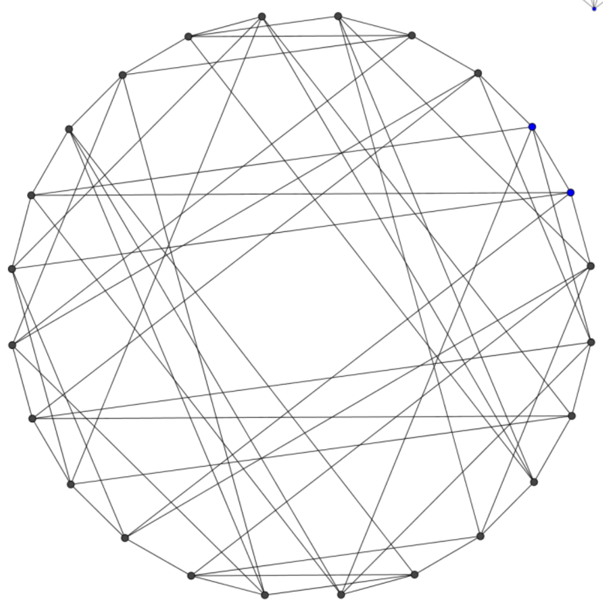
Перейдём к рассмотру графов. Заметим, что множество подграфов этих графов, получающихся удалением корневых вершин, будет совпадать с множеством связных графов, рассматривавшихся в следствии 1.(т.к. там также рассматривались связные графы, не имеющие вершину, смежную со всеми). Заметим, что такой подграф однозначно задаёт граф H. Поэтому мы просто можем рассмотреть соответствующие графам из следствия 1 графы H.

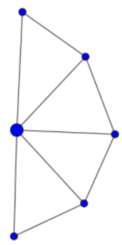
Графы с девятью рёбрами:

1). По лемме 9 есть вершина 7, смежная с 5 и 6(и отличная от вершин рассматриваемого подграфа), также есть вершина 8, смежная с 2 и 5. Т.к. степень вершины 5 – пять, и вершина 8 не принадлежит 1-подграфу вершины 1, то она совпадает с 7. Однако мы получим, что в 1-подграфе вершины 5 будет не менее чем 10 рёбер, то есть он не будет изоморфен 1-подграфу вершины 1. Получаем противоречие.



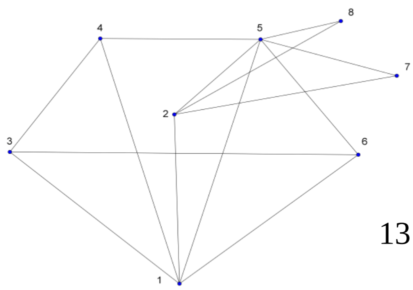
2). Данный граф является хорошим, на рисунке приведён пример локально-1-H совершенного графа.





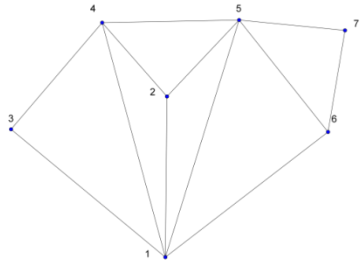
Рассмотрим графы с десятью рёбрами:

 1). Аналогично доказательству леммы 9 получим, что есть две вершины 7 и 8 графа G, отличных от остальных вершин и смежных с вершиной 5 (рассматривая 1-подграф вершины 2 и замечая, что в 1-подграфе вершины 1 с вершиной степени 2, которой в 1-подграфе

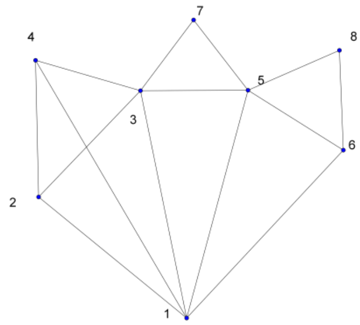


вершины 2 соответственна вершина 1, смежна корневая вершина степени 4), откуда получим, что степень вершины 5 не менее чем 6. Противоречие.

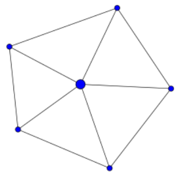
2). По лемме 9 есть вершина 7, смежная с 5 и 6. В 1-подграфе вершины 1, кроме вершины, соответствующей корневой, три вершины степени 4 и две вершины степени 2. В 1-подграфе вершины 5, кроме вершины, соответствующей корневой, есть 3 вершины степени не более чем 4, и вершина степени не менее чем 2, откуда получим, что эти подграфы не могут быть изоморфны. Противоречие

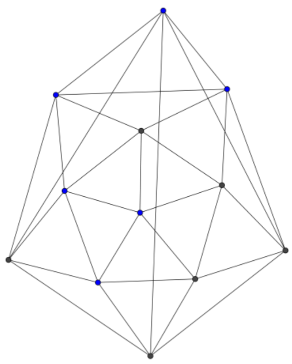


3). Рассмотрим вершину 7, смежную с вершиной 3. Аналогично лемме 9, она будет смежна с 5. Также рассмотрим вершину 8, смежную с вершинами 5 и 6. Если бы она совпадала с 7, то 1- подграф вершины 5 содержал бы цикл на четырёх вершинах, хотя 1-подграф вершины 1 такого не содержит. Значит, это различные вершины. 1-подграф вершины 1 (не учитывая саму вершину 1 и рёбра, смежные с ней) представляет собой цепь на пяти вершинах, одна из концевых вершин которой смежна с центральной. Т.к. 1-подграф вершины 5 (не учитывая саму вершину 5 и рёбра, смежные с ней) изоморфен ему, то мы получим, что одна из вершин 7, 8 смежна с вершиной 1. Получаем противоречие.



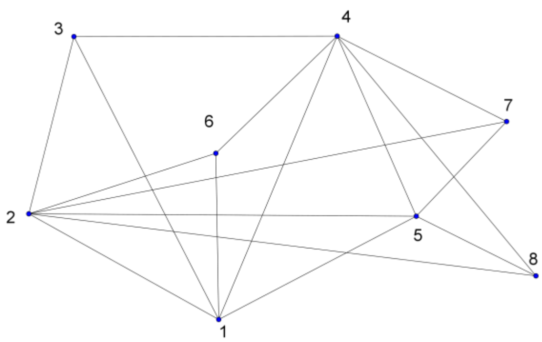
4). Данный граф является хорошим, на рисунке приведён пример локально-1-H совершенного графа.

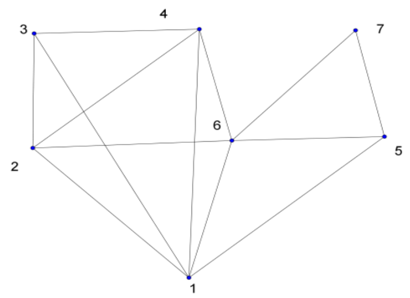




Рассмотрим графы с одинадцатью рёбрами:

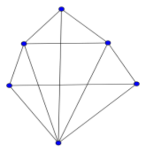
1). Рассмотрим 1-подграф вершины 5, ему принадлежат вершины 7 и 8. Т.к. 1-подграф вершины 1 представляет собой три вершины степени 3, каждая из который смежна с корневой с с двумя вершинами степени 4. Т.к. вершина 1 не смежна с вершинами 5 и 6, она будет соответствовать вершине степени 3 в 1-подграфе вершины 5, значит вершины 2 и 4 будут соответствовать вершинам степени 4, значит с ними будут смежны вершины 8 и 7. Получим, что вершины 2 и 4 будут иметь степень не менее 6, из чего выходит противоречие.

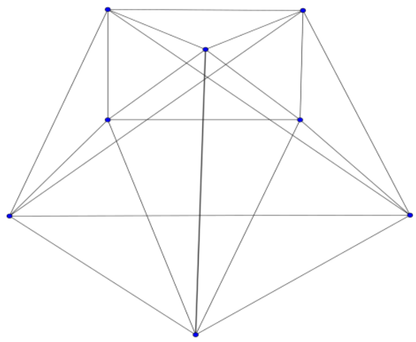




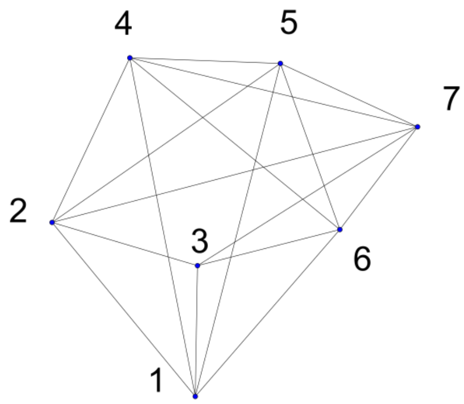
2).По лемме 9, есть вершина 7, смежная с 5 и 6. Однако тогда, мы получим, что 1-подграф вершины 6 содержит незамкнутую цепь на пяти вершинах, откуда следует, что её концевая вершина в 1-подграфе вершины 6 будет соответствовать вершине 5 в 1-подграфе вершины 1(потому что все цепи на пяти вершинах в 1-подграфе вершины 1 имеют её концевой вершиной). Если это вершина 4, то тогда вершины 1 и 7 должны быть смежны, чего быть не может. Если же это вершина 7, то вершины 4 и 5 должны быть смежными, чего также быть не может. В обоих случаях получим противоречие.

3). Данный граф является хорошим, на рисунке приведён пример локально-1-H совершенного графа.





Рассмотрим графы с двенадцатью рёбрами:



1). Рассмотрим 1-подграф вершины 6, пусть вершина 7 принадлежит ему, и не принадлежит 1-подграфу вершины 1. Т.к. 1-подграф вершины 1 представляет собой корневую вершину, вершину степени 3 и три вершины степени 4, и вершина 3 не смежна с вершинами 4 и 5, то она будет соответствовать вершине степени 3 в 1-подграфе вершины 6. Значит, вершина 7 соответствует вершине степени 4 в этом подграфе, и, т.к. она не смежна с вершиной 1, будет смежна с вершинами 4, 5, 6. Получим, что вершины 2,1,6,7 смежны с вершинами 4 и 5, откуда в 1-подграфе вершины 4 содержится вершина степени 5, откуда граф H имеет сильную вершину. Получаем противоречие.

Таким образом, мы рассмотрели все графы на не более, чем шести вершинах.

Пункт 5.

5. *Пусть $\xi(k)$ – наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-k равных неизоморфных графа; $\psi(k)$ – то же для связных графов. Найдите значения ξ и ψ для некоторых k. Попытайтесь оценить величины ξ, ψ и исследуйте точность своих оценок.*

Лемма 10.

Для любого связного графа, построенного на не более чем $2k + 1$ вершинах, найдётся его вершина, такая, что расстояние от неё до любой вершины графа будет не более, чем k.

Доказательство:

Отметим любую вершину графа. Будем рассматривать все остальные вершины по очереди. Если найдётся вершина, расстояние от которой до отмеченной вершины превышает k, то тогда рассмотрим кратчайший путь между этими двумя вершинами, и отметим вершину на этом пути на расстоянии k от рассматриваемой. Заметим, что нам достаточно показать что расстояние от новой отмеченной вершины до всех ранее рассмотренных вершин не будет превышать k, так как мы сможем сделать так с каждой вершиной. Действительно, рассмотрим кратчайшие пути от старой отмеченной вершины (пусть A) до новой (пусть B) и до рассматриваемой (пусть C) и до любой из рассматриваемых ранее (пусть D). Пути AC и AD будут сначала совпадать на несколько рёбер(может 0), а потом разделяться (возможно, один путь лежит в другом). Тогда если B лежит до вершины разделения, то расстояние BD будет не больше, чем AD, то есть не больше, чем k. Если же B лежит на AC, но не на AD, то она лежит на каком-то пути между C и D, но, т.к. всего длина пути не больше, чем количество вершин минус 1, то есть $2k$, и между C и B расстояние на этом пути ровно k, то между B и D расстояние не больше, чем расстояние между ними на этом пути, что не больше, чем k. Лемма доказана.

Заметим что, если у нас будут два локально-k равных графа, построенных на не более, чем $2k + 1$ вершине, то рассмотрим в одном из них вершину, такую, что расстояние от неё до любой вершины графа будет не более, чем k. Тогда k-подграф данной вершины будет изоморфен всему первому графу. Тогда соответственный k -подграф вершины второго графа будет изоморфен второму графу, т.к. он является его подграфом, и в нём столько же вершин, сколько и в первом графе, то есть столько же и во втором. Поэтому два локально-k равных графа, построенных на не более, чем $2k + 1$ вершине, будут обязательно изоморфны. Откуда мы получаем оценки:

$\xi(k) \geq 2k + 2, \psi(k) \geq 2k + 2.$

Также из теоремы 1, леммы 5 и следствия 2 мы получим оценки:

$\xi(k) \leq 4k + 4, \psi(k) \leq 10k.$