Задача 10. Локальная схожесть графов

В задаче рассматриваются простые графы и используются общепринятые понятия теории графов (см., например [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.]).

Граф с n вершинами называется *помеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два помеченных графа считаются равными, если множества вершин и рёбер у них совпадают. Два графа называются *изоморфными*, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором графе и наоборот. Изоморфные графы естественно отождествлять, т. е. считать совпадающими, и говорить о них как об *абстрактном графе*. Можно также считать, что абстрактный граф получается из помеченного графа опусканием пометок.

Подграф H графа G называется *подграфом, порожденным множеством вершин* $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит только вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все рёбра графа G, соединяющие эти вершины. Для графа G и целого числа $k \geq 1$ обозначим через $N_k(G)$ мультимножество, в котором каждой вершине v графа G соответствует подграф графа, порождённых всеми вершинами на расстоянии не более k от v (считаем, что любая вершина графа отстоит от самой себя на расстояние 0). В качестве примера рассмотрим граф G на рис. 1. Для удобства вершины графа помечены, но сам он мыслится как абстрактный. Соответствующие мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$ имеют вид, представленный на рис. 2.

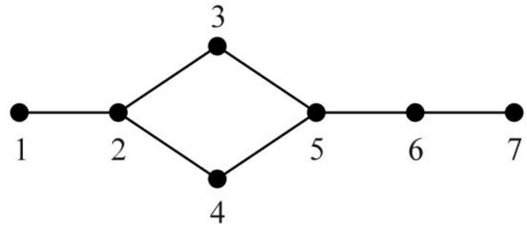


Рис. 1 к задаче № 10. Граф G

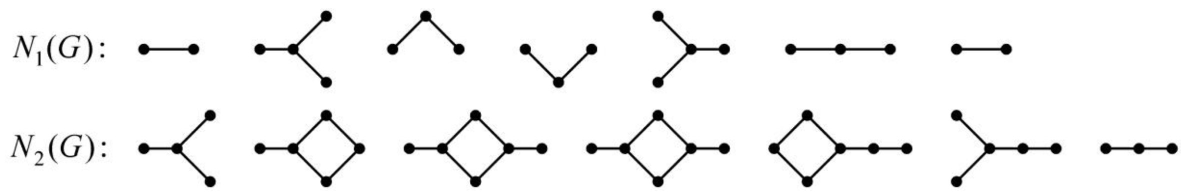


Рис. 2 к задаче № 10. Мультимножества $N_1(G)$ и $N_2(G)$

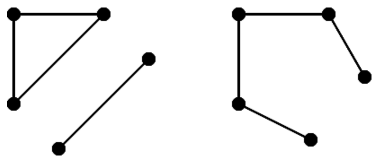
Для целого числа $k \geq 1$ назовём два абстрактных графа G и H *локально-k равными*, если совпадают мультимножества $N_k(G)$ и $N_k(H)$. *Локально*-0 *равными* назовём графы, у которых совпадают степенные последовательности. Два локально-k равных для целого неотрицательного числа k графа назовём *локально схожими порядка k* (или просто *локально схожими*). Если все подграфы из $N_k(G)$

попарно изоморфны одному и тому же графу *H*, то граф *G* назовём *локально-k-H совершенным*.

Исследуйте следующие задачи.

0.0. Верно ли, что два графа изоморфны, если совпадают их степенные последовательности?

Ответ. Нет. Следующие два графа неизоморфны и имеют одну и туже степенную последовательность:



0.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа.

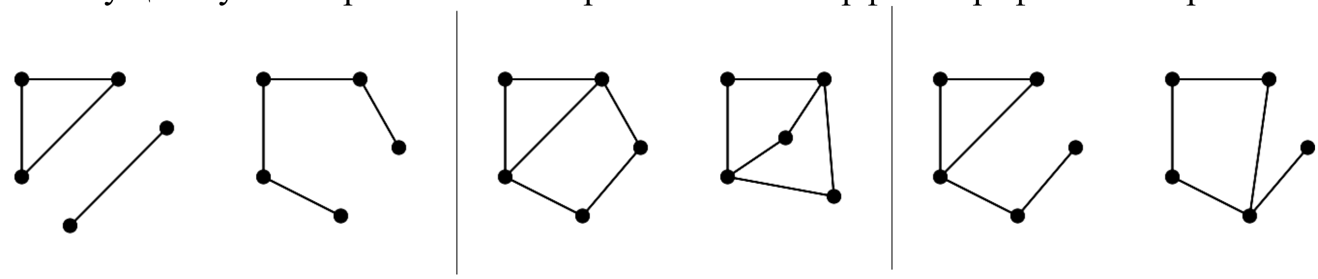
Ответ: 5.

В предыдущем пункте указана пара неизоморфных локально-0 равных графов на 5 вершинах. Остаётся показать, что нет пары неизоморфных локально-0 равных графов с числом вершин меньше 5. Это делается, используя перебор пар графов.

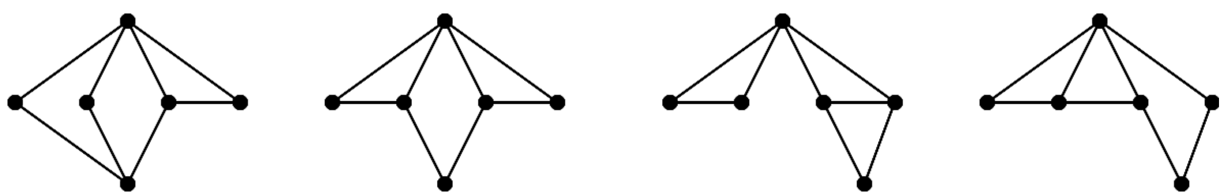
0.2. Перечислите все попарно неизоморфные графы с числом вершин меньше 6 и исследуйте их на локальную схожесть. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3, 3) и обоснуйте, что других таких графов нет.

Ответ: Среди графов с числом вершин меньшим 5 нет двух неизоморфных локально-*k* равных графов для любого *k*.

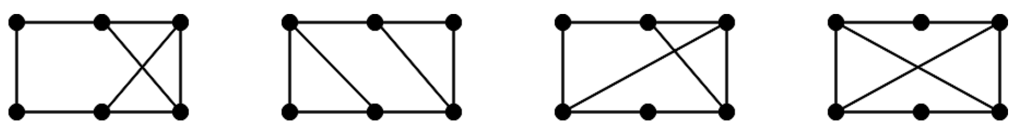
Существует 3 пары локально-0 равных неизоморфных графов на 5 вершинах.



Существует 4 попарно неизоморфных графа со степенной последовательностью (2, 2, 2, 3, 3, 4)

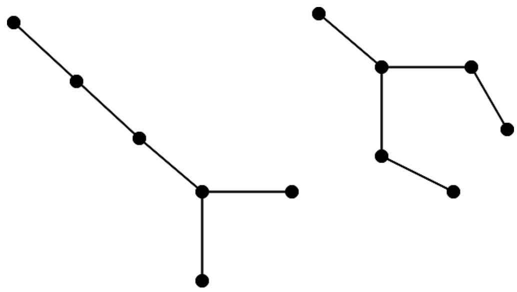


Существует 4 попарно неизоморфных графа со степенной последовательностью (2, 2, 3, 3, 3, 3)



1.0. Верно ли, что из локально-1 равенства следует изоморфизм графов? Верно ли, что из локально-1 равенства следует локально-0 равенство?

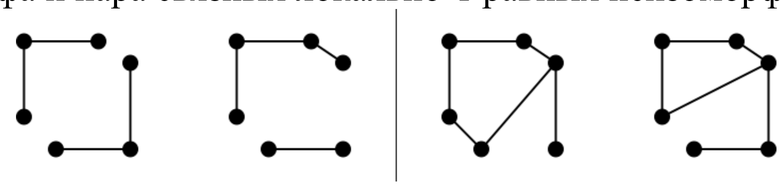
Ответ на первый вопрос – нет. Можно предъявить два локально-1 равных неизоморфных графа



Ответ на второй вопрос – да.

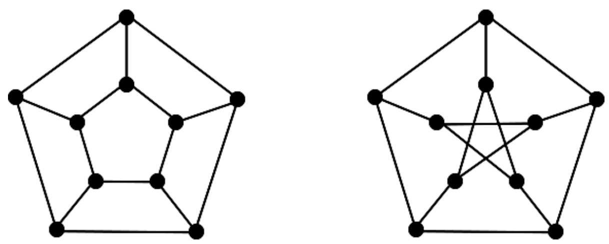
1.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа. Приведите ответ на этот вопрос при условии, что рассматриваемые графы являются связными.

Ответ: 6. На рисунке изображена пара несвязных локально-1 равных неизоморфных графа и пара связных локально-1 равных неизоморфных графа

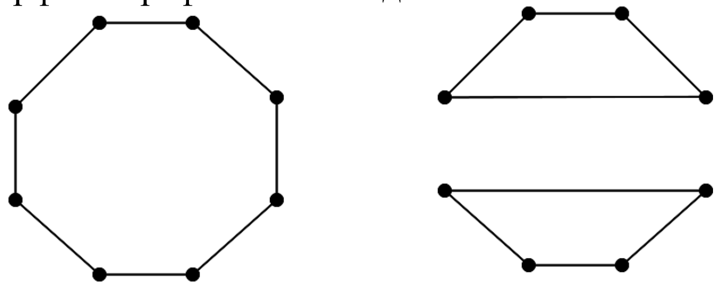


1.2. Пусть G_1 и G_2 – два локально-1-H совершенных графа с одинаковым числом вершин. Следует ли отсюда изоморфизм графов G_1 и G_2? Найдите граф H с наименьшим числом вершин, для которого существуют два локально-1-H совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин.

Ответ на первый вопрос*:* не следует. Следующие два графа являются локально-1-$K_{1,3}$ совершенными и неизоморфными



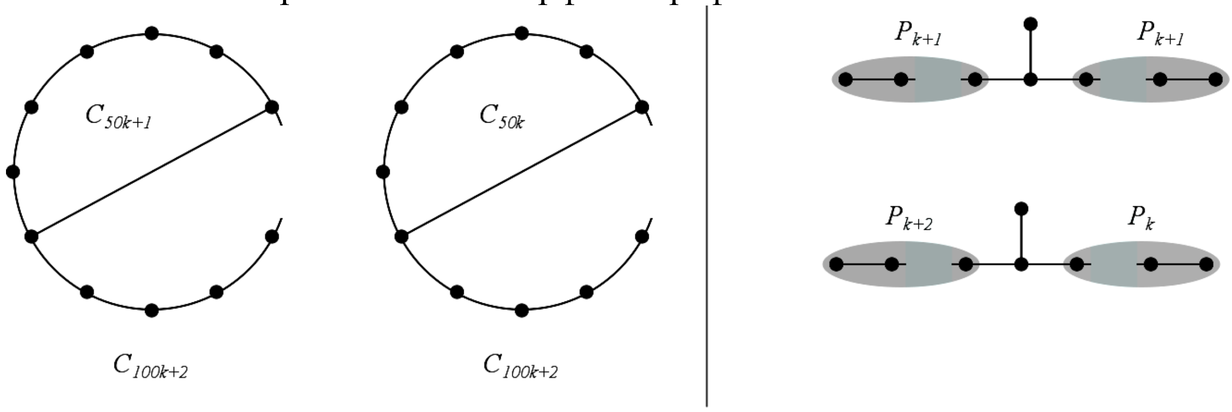
Ответ на вторую часть: 3. Граф $H = K_{1,2}$. Соответствующие локально-1-H совершенные неизоморфные графы имеют вид



2. Верно ли, что для какого-либо целого неотрицательного числа k из локально-k равенства графов следует их изоморфизм? Приведите

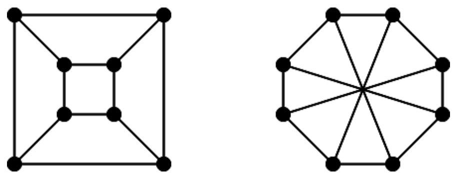
соответствующие контрпримеры. Исследуйте этот же вопрос в классе связных графов.

Решение. Неверно. Ниже на рисунке для любого $k > 0$ приведены две пары связных локально-k равных неизоморфных графов



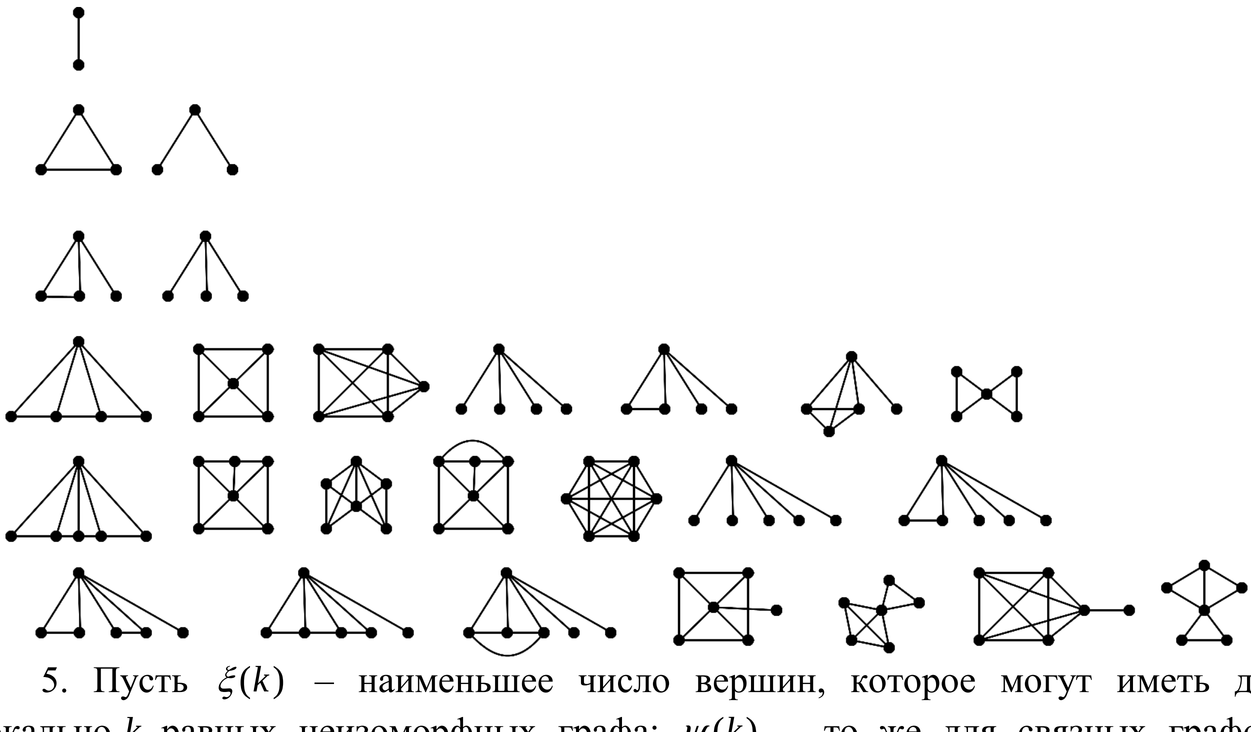
3. Верно ли, что из локальной схожести какого-либо порядка следует локальная схожесть меньших порядков? Верно ли, что если два графа локально схожи, то локально схожи и их дополнения?

Ответ на первый вопрос неизвестен. *Ответ* на второй вопрос – неверно. Следующие два графа локально-1 равные, но их дополнения таковыми не являются



4. Попробуйте найти все графы H с числом вершин меньше 7, для которых существуют локально-1-H совершенные графы.

Ответ:



5. Пусть $\xi(k)$ – наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-k равных неизоморфных графа; $\psi(k)$ – то же для связных графов.

Найдите значения ξ и ψ для некоторых k. Попытайтесь оценить величины ξ и ψ и исследуйте точность своих оценок.

Ответ: Для любого $k > 0$ верно $2k+2 \le \psi(k) \le 2k+4$ и $5 \le \xi(k) \le 2k+4$.