XVIII Республиканский Турнир Юных Математиков

Задача №9. **Декомпозиции графов**

Лицей БГУ - №1

Автор: Палюхович Антон
Научный руководитель: Шабан Светлана

Резюме.

Решены пункты 1-8, рассмотрены частные случаи пункта 9, представлены свои обобщения.

N 1

Лемма 1:

Если граф G допускает H-декомпозицию, =>|E(G)| ⋮|E(H)|.

Доказательство:

Т.к. G допускает H-декомпозицию. =>

$$\exists\ H_1 \sim H_2 \sim \dots \sim H_n \sim H \ \ |$$

1) $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset :\ \ i \neq j : i, j \leq n.$

2) $\bigcup_{i=1}^{n} E(H_i) = E(G).$

Т. к. (H_i) – изоморфны => $|E(H_1)| = |E(H_2)| = \cdots = |E(H_n)| = |E(H)|.$

Т.к. объединение (H_i) (по рёбрам) это G, а так же (H_i) – не пересекаются (по рёбрам, в дальнейшем мы не будем это писать). => $|E(G)| =$ $= \sum_{i=1}^{n} |E(H_i)| = n \times |E(H)|$ =>$|E(G)| \vdots |E(H)|$.

■

В 5 пункте наглядно показано, что обратное этому утверждение неверно.

N 2

Лемма 2:

Если граф G допускает H-декомпозицию, $k = |E(G)|/|E(H)|$, а M – мультимножество мощности $|V(H)|\cdot k$, которое для каждой вершины $x \in V(H)$ содержит число deg x ровно k раз, то M можно разбить на n подмножеств, где n – это количество вершин в графе G, таких, что суммы этих подмножеств соответствуют степеням различных вершин графа G.

Доказательство:

Рассмотрим некую вершину w графа G. Так как граф G допускает H-декомпозицию, то степень вершины w равна сумме степеней соответствующих ей вершин *k* графов (H_i) изоморфных H, которые являются элементами M. Кроме того, так как эти элементы M соответствуют вершине w, то они не могут соответствовать другим вершинам G, и, так как степень w больше 0, этой вершине соответствует как минимум один элемент из M.

Так как граф G допускает декомпозицию на k графов H, а в M содержатся степени вершин k графов H, то каждый элемент M соответствует какой-то вершине одного из тех графов, на которые декомпозируется G, следовательно, каждый элемент M соответствует какой-то вершине графа G.

Таким образом, элементы M можно разбить на группы, соответствующие различным вершинам C и суммы элементов в которых равны степени соответствующей вершины.

■

Простейшим следствием этого является, что сумма элементов в представленном множестве равна 2n, где n – это количество ребер в графе G.

N 3

Лемма 3:

Если r-регулярный граф G допускает H-декомпозицию, то НОД{$\deg x : x \in V(H)$} делит число r.

Доказательство:

Рассмотрим произвольную вершину w, а также все примыкающие к ней рёбра графа G. Т.к. граф G – r-регулярный => deg(w) = r.

Разобьём рёбра примыкающие к вершине w на разные не пересекающиеся множества, по принадлежности их к тому или иному подграфу G изоморфному H, соответственно $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

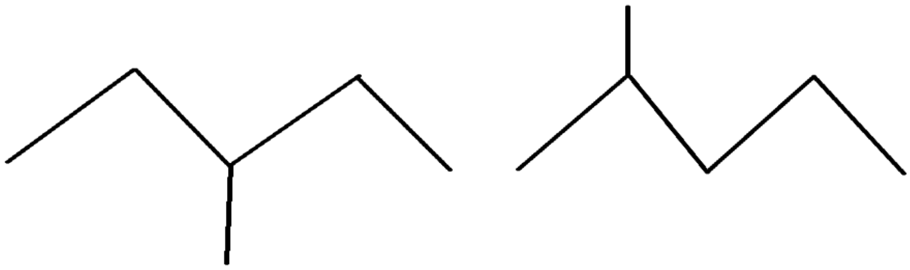
Ясно, что (A_i) с вершиной w будут изоморфны некоторым вершинам с прилегающими к ней ребрами H.

Т.е. $\forall i \leq k \quad |A_i| = \deg(h_i)$, где h_i –некоторая вершина из H => $\forall i \leq k \quad |A_i| \vdots$ НОД$\{x: x \in V(H)\}$=> r=deg(w)=$\sum_{i=1}^{k} |A_i| \vdots$ НОД$\{x: x \in V(H)\}$.

В 5 пункте наглядно показано, что обратное этому утверждение неверно.

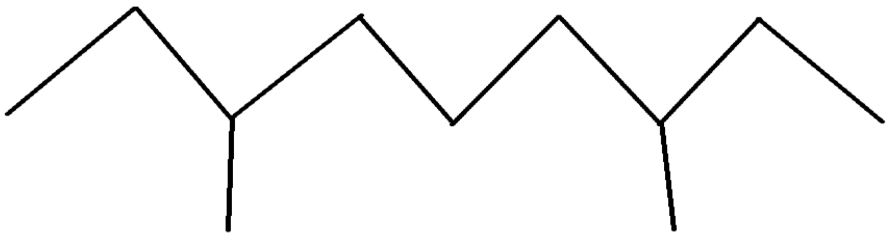
N 4

Пример: графы со степенными последовательностями (3,2,2,1,1,1)

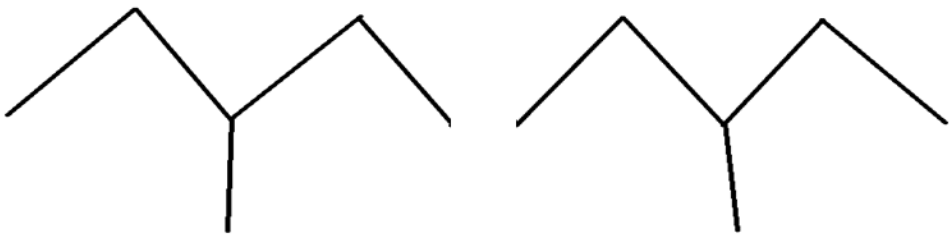


Слева представлен граф H_1, справа H_2.

А также граф G:



В графах H_1 и H_2 по 5 ребер, а в графе G – 10 ребер, и его можно разбить на связные подграфы с 5 ребрами единственным способом:

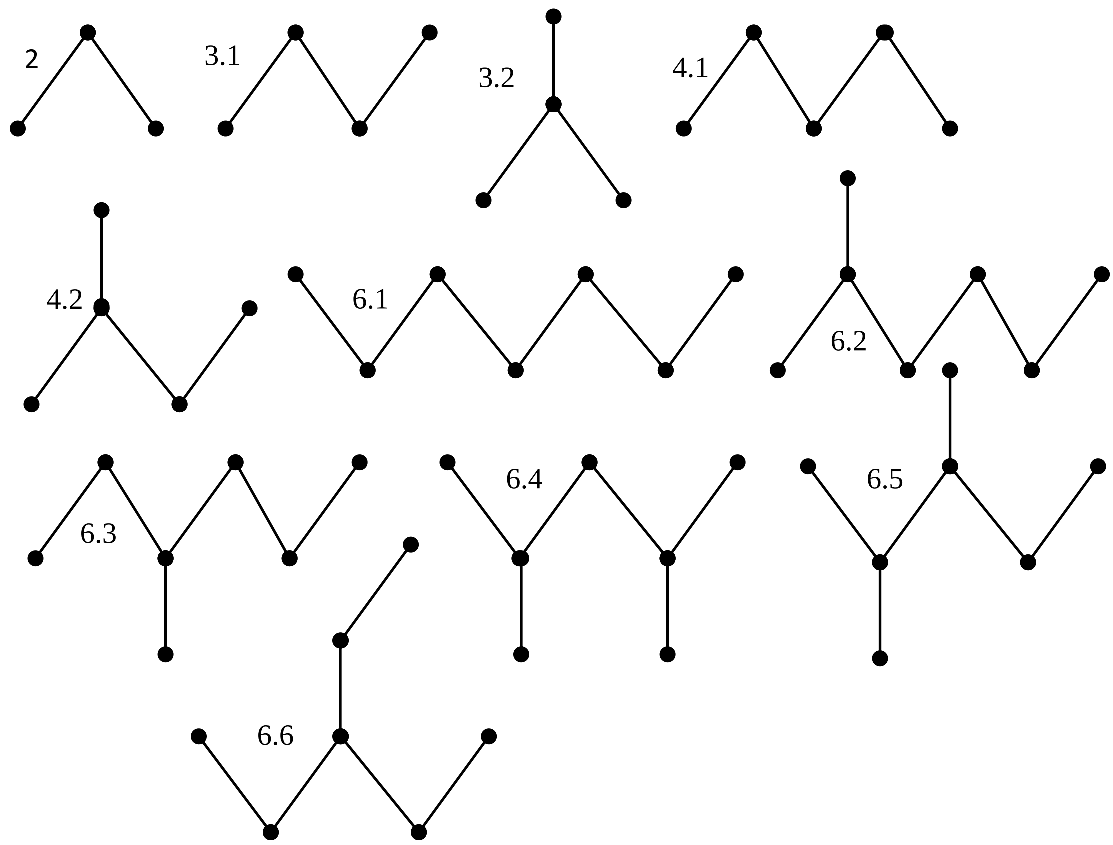


Следовательно, граф G допускает H_1-декомпозицию, и не допускает $H_2 -$ декомпозицию.

N 5.a

В графе куба 8 вершин и он кубический, следовательно, в нем 8*3/2=12 ребер. Таким образом, он может допускать декомпозицию только на деревья, имеющие 1, 2, 3, 4 или 6 ребер (на подграфы, имеющие 12 ребер, разбить граф куба нельзя, так как такой подграф в нём единственный и деревом не является).

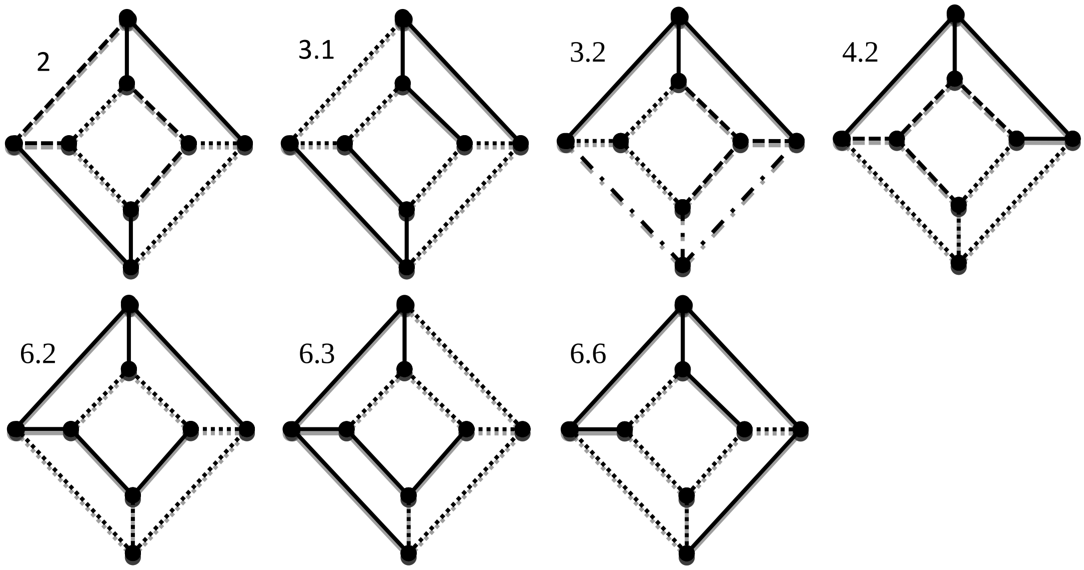
Разбиение на деревья с 1 ребром очевидно. Рассмотрим все возможные деревья с 2, 3, 4 или 6 ребрами, у которых из одной вершины выходит не более 3 ребер:



Так как данный граф кубический, то, как мы показали в 6 пункте, декомпозиция графа куба на графы 4.1 и 6.1 невозможна.

Рассмотрим графы 6.4 и 6.5. Так как в таких графах по 6 ребер, следовательно, граф куба должен разбиваться на 2 таких графа. В графах 6.4 и 6.5 вершин, из которых выходит 1 ребро, больше, чем вершин, из которых выходит 2 ребра, следовательно, при декомпозиции графа куба на такие подграфы будет как минимум одна вершина, в которой все ребра принадлежат различным подграфам, что невозможно, так как подграфа только 2. Следовательно, декомпозиция графа куба на графы 6.4 или 6.5 невозможна.

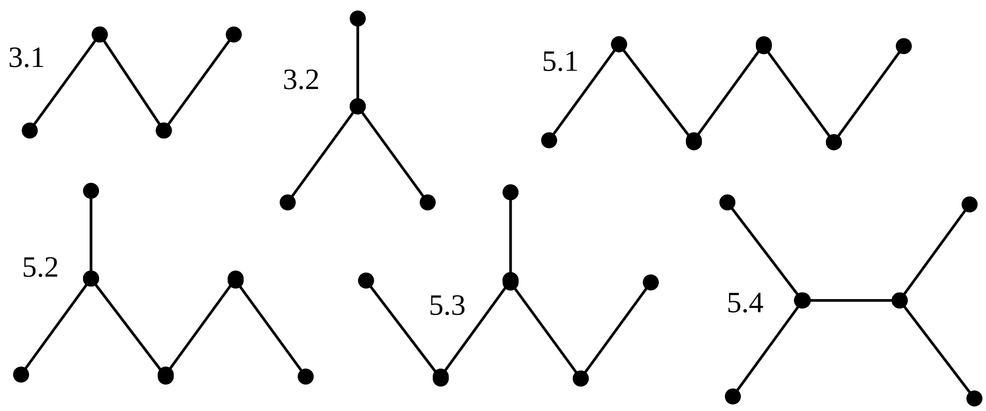
Примеры для остальных графов легко строятся:



N 5.б

В графе Петерсена 10 вершин и он кубический, следовательно, в нем 10*3/2=15 ребер. Таким образом, он может допускать декомпозицию только на деревья, имеющие 1, 3 или 5 ребер (на подграфы, имеющие 15 ребер, разбить граф Петерсена нельзя, так как такой подграф в нём единственный и деревом не является).

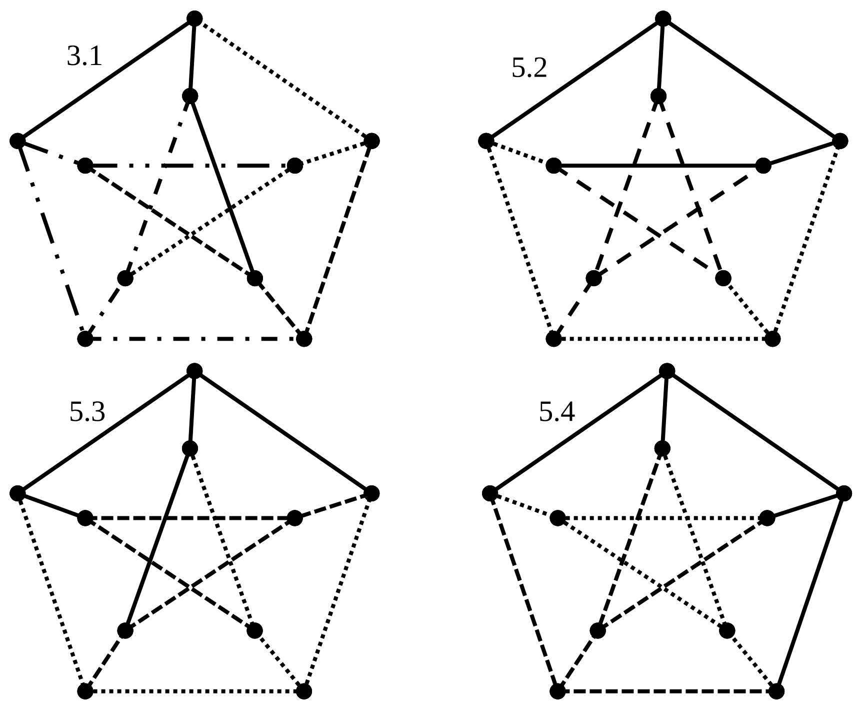
Разбиение на деревья с 1 ребром очевидно. Рассмотрим все возможные деревья с 3 или 5 ребрами, у которых из одной вершины выходит не более 3 ребер:



Декомпозиция графа Петерсена на графы вида 5.1 невозможна по той же причине, по которой невозможна декомпозиция графа куба на графы 4.1 и 6.1 в пункте 5а.

Так как исходный граф кубический и в нём есть нечетный цикл, то, как следует из теоремы 8, декомпозиция графа Петерсена на граф 3.2 невозможна.

Примеры для остальных графов легко строятся:



N 6

Лемма 6:

Для каждого целого числа s ≥ 5 произвольный кубический граф не допускает P_s-декомпозиций (P_s – простая цепь с s вершинами).

Доказательство:

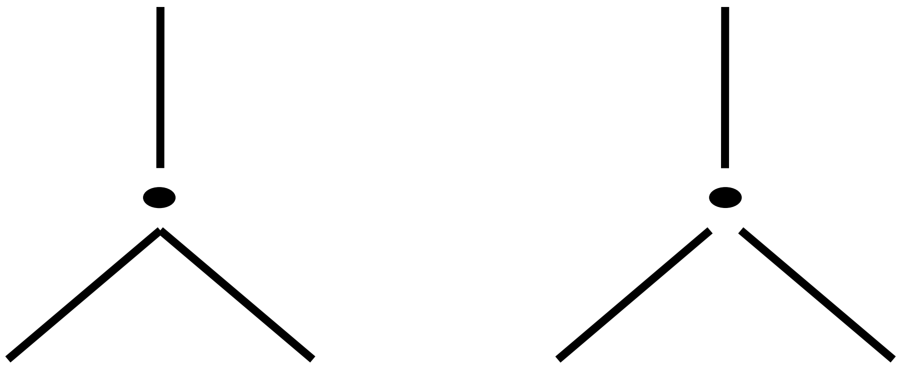
В граф P_s, будем называть вершину «средней», если её степень равна 2, и «крайней», если её степень равна 1.

В графе P_s, при s≥2, будет ровно 2 – «крайние» вершины, и s-2 – «средние» вершины.

Допустим, что кубический граф допускает P_s -декомпозицию.

Рассмотрим произвольную вершину кубического графа с примыкающими к ней рёбрами.

Рёбра могут разбиваться двумя способами у данной вершины.



1) На «среднию» и «крайнию» вершину, графов изоморфных P_s.

2) На 3 «крайних» вершины графов изоморфных P_s.

Пусть вершин разделённых первым способом – n, а разделённых вторым способом – m.

Тогда, «крайних» вершин задействовано n+3m, а «средних» вершин n. Но, при s≥5, s-2<2, то есть «средних» вершин должно быть больше, чем «крайних». Противоречие.

Значит, при s≥5, граф не допускает P_s –декомпозицию.

Кроме того, при s=4 s-2=2 =>n+3m=n=>m=0.

Следствие:

При P_4-декомпозиции в каждой вершине кубического графа находится ровно по одной вершине степени 1 и степени 2 различных подграфов.

N 7.a

Теорема 7.1.1:

Любой граф G допускает P_3-декомпозицию тогда и только тогда, когда в нем $2n$ ребер.

Доказательство:

Пускай в графе G 2n ребер.

Используем индукцию по количеству рёбер графа G.

База:

Для 2n=0 или 2, очевидно.

Шаг индукции:

Пусть для любого чётного числа меньшего 2n утверждение верно. Докажем для 2n.

Рассмотрим любую пару смежных рёбер, т.к. n>0, то она существует.

Рассмотрим три случая:

1) При удалении этих рёбер остаётся один связный подграф.

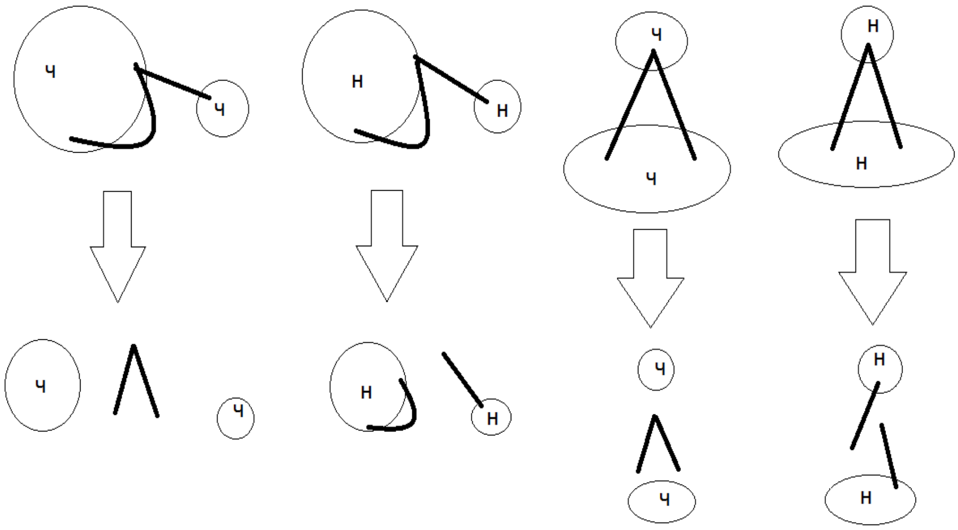
2) При удалении остаётся два связных подграфа.

3) При удалении остаётся три связных подграфа.

(одна вершина тоже считается связным подграфом)

Первый случай очевиден, мы просто разбиваем на два подграфа (рассмотренную пару смежных рёбер и остальной связный подграф), оба они содержат чётное количество рёбер меньшее 2n.

Рассмотрим второй случай:

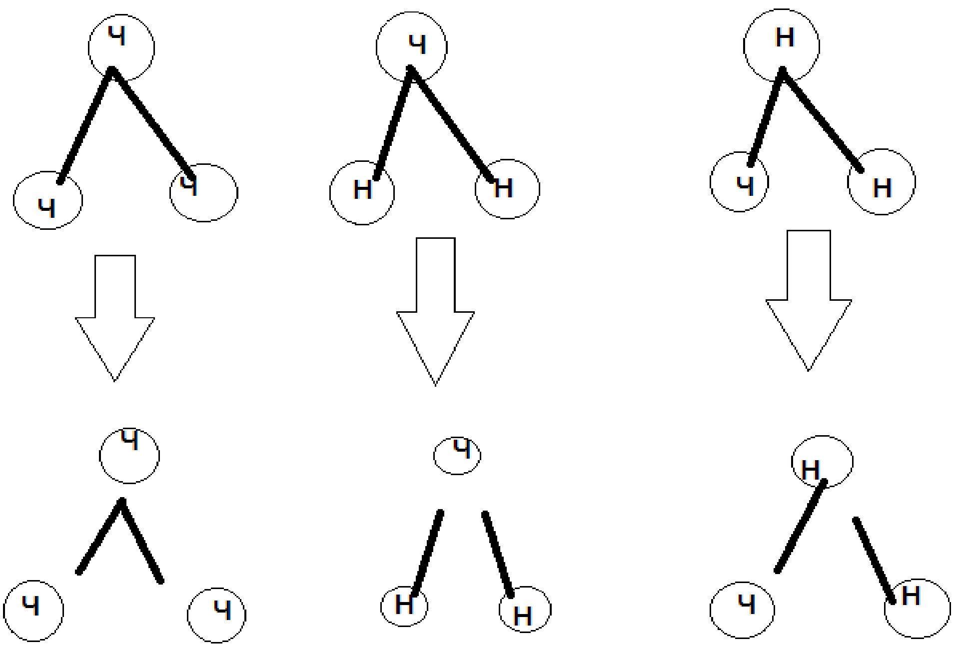


На данном рисунке представлены все возможные случаи, когда после вырезания смежных рёбер остаётся две части, а также соответственно способы их разбиения на более мелкие части.

(выделенная галка обозначает пару смежных рёбер, круги с буквой «ч» связанные подграфы с чётным количеством рёбер, а круги с буквой «н» связанные подграфы с нечётным количеством рёбер)

Легко заметить, что во всех данных разбиениях мы будем получать связанные подграфы с чётным, а также меньшим количеством рёбер.

Рассмотрим третий случай:



Легко заметить, что во всех данных разбиениях мы будем получать связанные подграфы с чётным, а также меньшим количеством рёбер.

Все случаи рассмотрены.

■

В противном случае, когда в графе нечетное число рёбер, то он не допускает такой декомпозиции, так как его число рёбер не кратно числу ребер подграфа.

Алгоритмизация:

Индукция сама задаёт алгоритм разбиения, который работает за O(m^2), где m − количество рёбер. Так как на каждом этапе разбиения нам надо посчитать количество (чётное оно или нечётное) рёбер в связанных подграфах, а также проверять их на связность.

А всего у нас в кубическом графе с n – вершинами, 3n/2 рёбер, то есть асимптота такая же самая, с точностью до коэффициента.

N 7.б

Лемма 7.2.1:

Если кубический граф допускает P_4-декомпозицию, это равнозначно тому, что граф имеет совершенное паросочетание[1].

Доказательство в одну сторону:

Как следует из пункта 6, при s=4 в кубическом графе в каждой вершине будет вершина одного подграфа степени 2 и одна вершина другого подграфа степени 1.

Предположим, P_4 – декомпозиция связного кубического графа G возможна. В таком случае, так как в каждом подграфе есть две связанные между собой ребром вершины степени 2, а в каждой вершине графа G лежит ровно одна вершина степени 2 какого-то подграфа, то все вершины графа G по ребрам разбиваются на пары.

Доказательство в другую сторону:

Предположим, что мы можем разбить на пары по ребрам все вершины связного кубического графа G_2. Раскрасим в различные цвета соединяющие все эти пары ребра и поместим маркер в произвольную вершину графа G_2.

Так как каждая вершина содержится в одной раскрашенной паре и имеет степень 3, следовательно, из каждой вершины выходят 3-1=2 не закрашенных ребра.

Закрасим любое из не закрашенных выходящих из помеченной вершины ребер тем цветом, которым закрашено ребро, соединяющее отмеченную вершину с парной ей, и переместим по данному ребру маркер. Затем закрасим единственное не закрашенное ребро отмеченной вершины тем цветом, которым закрашено ребро, соединяющее отмеченную вершину с парной ей, с снова переместим маркер по закрашенному ребру.

Так как изначально в каждой вершине ровно 2 не закрашенных ребра, то мы посетим каждую вершину не более чем по одному разу и из каждой вершины нам есть куда переместить маркер. Следовательно, раз вершин не бесконечно, то в итоге мы вернемся в ту вершину, из которой начали. После этого, если остались не закрашенные ребра, переместим маркер к любой вершине с не закрашенным ребром и будем повторять данный процесс, пока не закрашенных ребер не останется.

После этого из каждой вершины будет выходить ровно 1 ребро, закрашенное так же, как ребро, соединяющее её с парной ей, и никакое ребро, соединяющее две не парных вершины, не будет закрашено каким-либо цветом, кроме какого-либо из тех, которыми закрашены ребра, соединяющие эти вершины с парными им.

Таким образом, если считать ребра одного цвета подграфом, то мы получаем P_4 – декомпозицию графа.

Таким образом, возможность P_4 – декомпозиции кубического графа равнозначна возможности разбить вершины такого графа на соединенные ребрами пары.

Лемма 7.2.2:

Если кубический граф допускает P_4 – декомпозицию, это равнозначно тому, что все его вершины разбиваются на непересекающиеся циклы.

Доказательство в одну сторону:

Пусть вершины графа разбиваются на непересекающиеся циклы. Так как в кубическом графе степень каждой вершины равна 3, каждая вершина одним ребром связана с одной вершиной, не являющейся для неё соседней по циклу.

Таким образом, если рассмотреть только эти связи, то мы получим разбиение всех вершин графа на пары. Так как возможность разбиения кубического графа на пары равнозначна возможности P_4 – декомпозиции этого графа, следовательно, мы доказали, что если вершины графа разбиваются на непересекающиеся циклы, то граф допускает возможность P_4 – декомпозиции.

Доказательство в другую сторону:

Пусть граф допускает возможность P_4 – декомпозиции. Тогда его вершины можно разбить на пары по ребрам.

Рассмотрим какую-либо вершину данного графа. Сдвинемся по любому из двух не связывающих пару ребер этой вершины. Тогда у той вершины, в которой мы окажемся, будет лишь одно ребро, по которому мы не перемещались и которое не связывает её с парной ей.

Переместимся по этому ребру и продолжим перемещаться дальше, пока не попадем в вершину, из которой мы начали. Так как изначально в каждой вершине ровно 2 ребра, по которым мы не перемещались и которые не связывают вершину с парной ей, то мы посетим каждую вершину не более чем по одному разу и из каждой вершины нам есть куда переместиться. Следовательно, раз вершин не бесконечно, то в итоге мы вернемся в ту вершину, из которой начали.

Таким образом, мы получаем цикл. Затем мы переместимся в любую вершину, в которой мы еще не бывали, и повторим эту последовательность действий, и будем повторять это, пока не обойдем все вершины.

После этого, каждая вершина графа будет наличествовать в каком-то цикле, и эти циклы не будут пересекаться по причине того, что каждую вершину мы будем проходить ровно один раз.

Таким образом, если возможна P_4 – декомпозиция кубического графа, то возможно разбиение вершин этого графа на непересекающиеся циклы.

■

Таким образом, мы получили два критерия возможности P_4 – декомпозиции кубического графа.

Теорема 7.2.1:

Кубический граф без мостов[(2)] *допускает* P_4 *– декомпозицию.*

Доказательство:

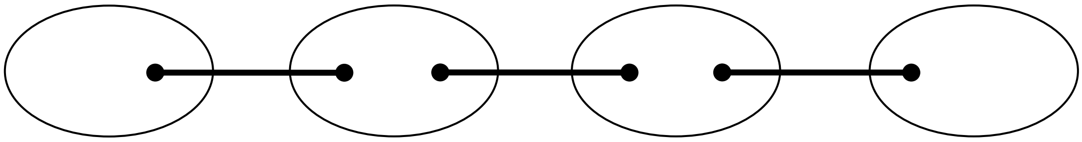
Пусть имеется кубический граф без мостов. Тогда, по теореме Петерсена, этот граф имеет совершенное паросочетание, то есть его вершины разбиваются на пары, из чего следует, что этот граф допускает P_4 – декомпозицию.

■

Данную теорему можно расширить.

Расширение Теорема 7.2.1:

Кубический граф, мосты в котором находятся последовательно, допускает P_4 – декомпозицию.



Доказательство:

Граф данного типа имеет совершенное паросочетание.

Доказательство данного утверждения можно прочитать в статье: «Factors and Factorizations of Graphs», Theorem 1.5.2.

А так как он имеет совершенное паросочетание, по лемме 7.2.1, он допускает P_4 – декомпозицию.

■

Также представим класс графов, который не допускает P_4 – декомпозиции:

Теорема 7.2.2:

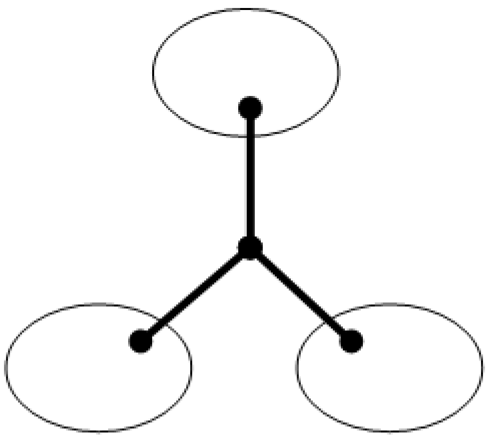
Если в кубическом графе существует вершина, вырезав которую, мы получим три взаимно не связанных графа, то этот граф не допускает P_4 – декомпозиции.

Доказательство:

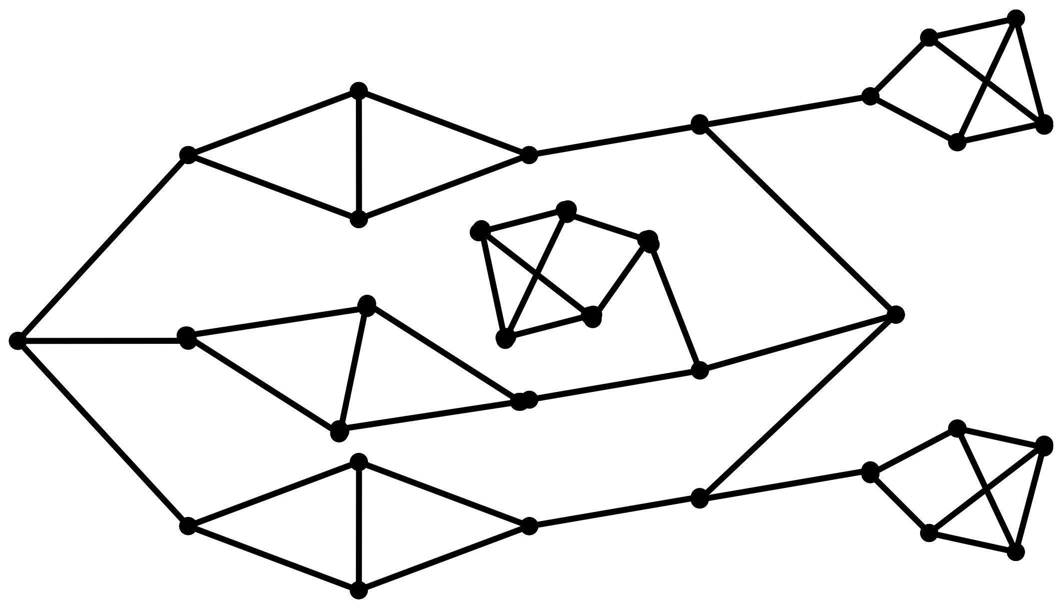
Пусть такая вершина существует. Тогда мы не сможем разбить граф на циклы, так как эта вершина не может состоять ни в одном из них.

А из этого следует, по лемме 7.2, что граф не допускает P_4 – декомпозиции.

■



Хотя, это не является критерием, так как возможны графы, не удовлетворяющие данному условию и не допускающие P_4 – декомпозиции. Представим следующий пример:



Однако мы можем расширить класс графов, который не допускает P_4 – декомпозиции:

Расширение Теоремы 7.2.2:

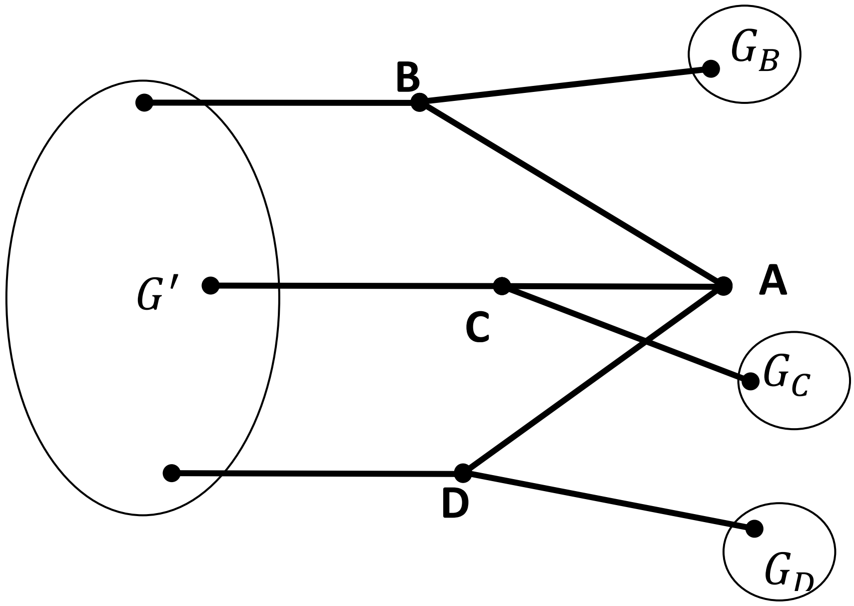
Если в графе существует вершина, три смежные с которой вершины являются концами мостов, граф не допускает P_4 – декомпозиции.

Соответственно на рисунке эта вершина представлена буквой «A» , а ей смежные – «B», «C» и «D».

Доказательство:

Пусть данный граф допускает P_4 – декомпозицию. Тогда, по лемме 7.2, можно утверждать, что граф можно разбить на не пересекающиеся циклы, так чтобы были задействованы все вершины.

Значит, через A будет проходить цикл. Пусть, не нарушая общности, он также будет проходить через C и D. Тогда, он не будет проходить через B. Но, это значит, что никакой цикл из G_B и G' не сможет пройти через B, т.к. он должен замкнуться. => Через B никакой цикл не пройдёт => Противоречие.



■

Алгоритмизация:

В статье: «6 Maximum Matching», глава 6.4 «Maximum Matching for general graphs» представлен алгоритм нахождения максимального паросочетания[(3)]. А также показано, что он работает за $O(mn^2)$, где n – количество вершин, а m – количество рёбер. То есть в нашем случае $O(n^3)$. Т.к. количество рёбер в кубическом графе растёт линейно, с увеличением количества вершин.

А также в статье: «Factors and Factorizations of Graphs», глава 1.7 «Algorithms for Maximum Matchings» представлен алгоритм нахождения максимального паросочетания, работающий за $O(|G|^3)$. То есть, опять же, для нашего случая $O(n^3)$.

Но при этом понятно, что если ∃ превосходное паросочитание, то это будет максимальным паросочетанием. Иначе в максимальном паросочетании не будут участвовать все вершины.

То есть, по лемме 7.2.1, мы можем за $O(n^3)$ определить допускает ли кубический граф P_4 – декомпозицию.

А также, если он допускает, то, как и в доказательстве леммы 7.2.1, мы можем восстановить одно из разбиений графа.

Таким образом, мы можем организовать алгоритм, работающий за полиномиальное время.

N 8

Теорема 8:

Кубический граф допускает $K_{1,3}$ − декомпозицию тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют циклы нечетной длины.

Доказательство (общая часть):

Пусть H − дерево со степенями вершин (3,1,1,1).

Будем говорить, что мы закрашиваем вершину в белый, если мы вырезаем дерево H с корнем в данной вершине графа, и раскрашиваем в черный, если в данной вершине корня нет. Тогда должно выполняться следующее условие, которое будет являться и достаточным:

∀ смежные вершины закрашиваются разным цветом.(*)

Доказательство (в одну сторону):

Пусть существует нечётный цикл, и мы раскрасили вершины в нем в соответствии со (*).

Сдвинем все вершины в этом цикле по часовой стрелке. В соответствии со (*) все белые вершины перейдут в черные, и наоборот. Таким образом, количество черных вершин равно кол-ву белых => в цикле четное число вершин. Противоречие.

Доказательство (в другую сторону):

Пусть у нас не существует нечетных циклов.

Закрасим любую вершину белым. А дальше для каждой вершины рассмотрим любой путь, который необходимую преодолеть, чтобы попасть в рассмотренную вершину, а также и его длину. Если она нечётна, то будем закрашивать эту вершину черным. Если она чётна, то будем закрашивать эту вершину белым.

Пусть до какой-то вершины A будет существовать и чётной длины путь и нечётной длины. Тогда пройдясь сначала по пути с чётной длинной, а потом по пути нечётной длины, и вернувшись в вершину A, мы получим цикл нечётной длины. Противоречие.

Значит всё определено корректно.

Также можно заметить, что если какая-то вершина закрашена белым (черным) и длина пути до неё 2n (2n+1)=> длина пути до её соседей 2n+1 (2n+2) => её соседи будут закрашены черным (белым).=> (*) выполнена => => Такой граф допускает H – декомпозицию.

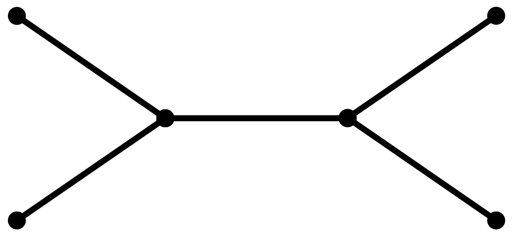
■

Если рассмотреть белые и черные вершины, то (*), следовательно, граф G *− двудольный, где белые вершины лежат в одной доле, а черные – в другой.*

Алгоритмизация

На странице http://www.geeksforgeeks.org/bipartite-graph/ показан алгоритм, который осуществляет проверку двудольности графа за $O(n^2)$, где n – число вершин.

N 9

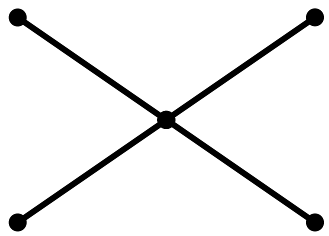


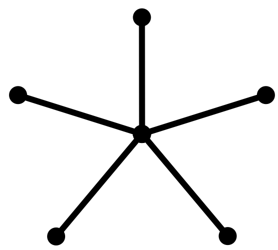
Лемма 9.1:

5-регулярный граф G допускает декомпозицию на дерево H со степенями вершин (3,3,1,1,1,1), тогда и только тогда, когда имеет совершенное паросочетание.

Доказательство:

Это следует из теоремы 10.1.2.





Лемма 9.2:

8-регулярный граф всегда допускает $K_{1,4}$ – декомпозицию, и 10-регулярный граф всегда допускает $K_{1,5}$ – декомпозицию.

Доказательство:

Это следует из теоремы 10.1.1.

N 10

Обобщение 1:

Теорема 10.1.1:

r-регулярный граф допускает $K_{1,r}$ – декомпозицию тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины.

Доказательство (общая часть):

Пусть H − дерево со степенями вершин (r,1,1,…,1).

Будем говорить, что мы закрашиваем вершину в белый, если мы вырезаем дерево H с корнем в данной вершине графа, и раскрашиваем в черный, если в данной вершине корня нет. Тогда должно выполняться следующее условие, которое будет являться и достаточным:

∀ смежные вершины закрашиваются разным цветом.(*)

Доказательство (в одну сторону):

Аналогично доказательству в №8.

Доказательство (в другую сторону):

Аналогично доказательству в №8.

Если рассмотреть белые и черные вершины, то (*), следовательно, граф G − двудольный, где белые вершины лежат в одной доле, а черные – в другой.

Алгоритмизация

На странице http://www.geeksforgeeks.org/bipartite-graph/ показан алгоритм, который осуществляет проверку двудольности графа за $O(n^2)$, где n – число вершин.

Теорема 10.1.2:

2r-регулярный граф G всегда допускает $K_{1,r}$ – декомпозицию, причем такую, что в каждой вершине G лежит корень ровно одного $K_{1,r}$.

Доказательство:

Раскрасим все вершины 2r-регулярного графа G в различные цвета и поместим маркер в произвольную вершину графа G.

Так как каждая вершина имеет 2r, следовательно, из каждой вершины выходят 2r не закрашенных ребра.

Закрасим любое из не закрашенных выходящих из помеченной вершины ребер тем цветом, которым закрашена эта вершина, и переместим по данному ребру маркер. Затем закрасим любое не закрашенное ребро отмеченной вершины тем цветом, которым закрашена эта вершина, и снова переместим маркер по закрашенному ребру.

Так как изначально в каждой вершине ровно 2r не закрашенных ребра, то мы посетим каждую вершину не более чем по r раз и из каждой вершины нам есть куда переместить маркер. Следовательно, раз вершин не бесконечно, то в итоге мы вернемся в ту вершину, из которой начали. После этого, если остались не закрашенные ребра, переместим маркер к любой вершине с не закрашенным ребром и будем повторять данный процесс, пока не закрашенных ребер не останется.

Так как в каждую вершину мы пришли и покинули её одинаковое число раз, следовательно, из каждой вершины выходит ровно 2r/2=r ребер, закрашенных так же, как эта вершина, и никакое ребро не будет закрашено каким-либо цветом, кроме какого-либо из тех, которыми закрашены вершины, которые соединяет это ребро.

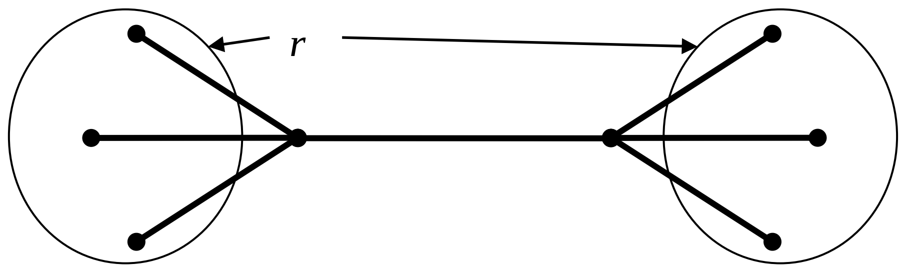
Таким образом, если считать ребра одного цвета ребрами одного подграфа, а вершину такого цвета – его корнем, то мы получаем $K_{1,r}$ – декомпозицию, причем такую, что в каждой вершине G лежит корень ровно одного $K_{1,r}$.

■

Алгоритмизация:

Доказательство задаёт алгоритм, который работает за O(m), где m – число ребер в графе G.

Обобщение 2:



Теорема 10.2.1:

2r+1-регулярный граф G допускает B_r − декомпозицию(5) тогда и только тогда, когда имеет совершенное паросочетание.

Доказательство (общая часть):

2r+1-регулярный граф с n вершинами имеет n(2r+1)/2 ребер, а при B_r − декомпозиции у каждого подграфа 2r+1 вершина => 2r+1-регулярный граф разбивается на n/2 подграфов при B_r − декомпозиции.

Доказательство в одну сторону:

Предположим, что 2r+1-регулярный граф допускает B_r − декомпозицию. Так как 2*(r+1)=2r+2>2r+1=>никакие две вершины подграфов степени r+1 не лежат в одной вершине графа G. Так как всего таких вершин 2*k=2*(n/2)=n=>в каждой вершине графа G лежит ровно по одной вершине подграфа степени r+1, а, так как эти вершины попарно соединены ребрами, то по этим ребрам вершины графа G разбиваются на пары.

Доказательство в другую сторону:

Предположим, что мы можем разбить на пары по ребрам все вершины связного r-регулярного графа G_2.

Рассмотрим граф, который останется после вырезания этих ребер. Этот граф является 2r-регулярным, так как в совершенном паросочетании участвуют все вершины. По теореме 10.1.2 данный граф допускает $K_{1,r}$ – декомпозицию, причем такую, что в каждой вершине G лежит корень ровно одного $K_{1,r}$.

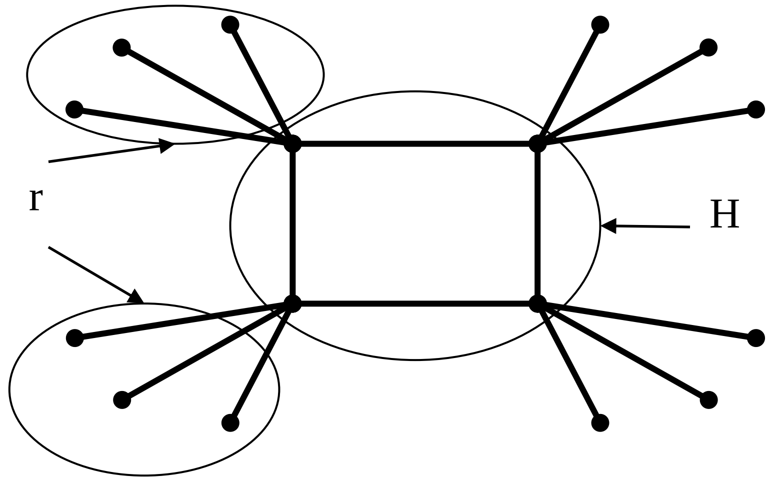
Тогда, присоединив к каждому из удаленных ребер $K_{1,r}$ с корнем в данной вершине, получим B_r − декомпозицию графа G.

Таким образом, возможность B_r –декомпозиции r-регулярного графа равнозначна возможности разбить вершины такого графа на соединенные ребрами пары.

■

Алгоритмизация:

Как и в пункте 7б, алгоритмизация сводится к тому, чтобы найти максимальное паросочетание и сравнить его с совершенным и на его основе построить декомпозицию графа.



Теорема 10.2.2:

2r+k-регулярный граф G допускает $F_r(H)^{(6)}$ − декомпозицию тогда и только тогда, когда в нем можно выделить непересекающиеся k-регулярные графы H на всех вершинах G.

Доказательство в одну сторону:

Пускай в графе G можно выделить непересекающиеся k-регулярные подграфы на всех вершинах G. Тогда, убрав все ребра этих подграфов, мы получим 2r-регулярный граф G_2.

Как следует из теоремы 10.1.2, 2r-регулярный граф допускает $K_{1,r}$ – декомпозицию, причем такую, что в каждой вершине G_2 лежит корень ровно одного подграфа $K_{1,r}$.

Объединив каждый подграф H со всеми $K_{1,r}$ подграфами, чьи корни лежат на вершинах этого графа H, мы получим подграфы $F_r(H)$, причем, так как в каждой вершине G лежит вершина какого-либо подграфа H, а в подграфах $K_{1,r}$ содержатся все ребра, которые не содержатся в подграфах H, то в этих $F_r(H)$ подграфах содержатся все ребра графа G.

Таким образом, мы получаем $F_r(H)$ – декомпозицию графа G.

Доказательство (в другую сторону):

Предположим, что 2r+k-регулярный граф допускает $F_r(H)$ − декомпозицию. Так как $2*(r+k)=2r+2k>2r+k$=>никакие две вершины подграфов $F_r(H)$ степени r+k не лежат в одной вершине графа G. Так как на каждую вершину подграфа H приходится r+k/2 ребер, и столько же ребер приходится на каждую вершину 2r+k-регулярного графа=>в каждой вершине графа G лежит ровно по одной вершине подграфа степени r+k.

Так как в каждой вершине графа G лежит ровно по одной вершине подграфа H и граф G допускает $F_r(H)$ – декомпозицию, то, оставив от подграфов $F_r(H)$ только подграфы H, мы получим непересекающиеся k-регулярные графы H на всех вершинах G.

■

Определения:

Совершенное паросочетание[1] – это множество попарно несмежных рёбер, в котором участвуют все вершины графа.

Мост[2] – это ребро графа, удаление которого влечёт за собой появление двух не связанных между собой графов.

Максимальное паросочетание[3] – это множество попарно несмежных рёбер, в котором участвует максимальное количество вершин.

Кость степени r[4] – дерево, состоящее из двух соединенных ребром вершин степени $r+1$ и $2r$ вершин степени 1.

B_r – декомпозиция[5] – декомпозиция графа на кости степени r.

$F_r(H)$[6] – граф, полученный из графа H путем прибавления к каждой его вершине r ребер, соединяющих её с вершинами степени 1.

Литература:

Wikipedia/Petersen's theorem

Wikipedia/Tutte theorem

Factors and Factorizations of Graphs

6 Maximum Matching

Geeksforgeeks.org

Данные документы находятся в свободном доступе.