Задача 9. Декомпозиции графов

сборная Лицея БГУ-10 и гимназии N1 г. Минска
Авторы: Игнатенко Петр и Народецкий Андрей, Лицей БГУ

Резюме

В данной работе нами были рассмотрены некоторые частные случаи графов G и H. Для произвольного G были доказаны теоремы 1—4 и даны ответы на вопросы пунктов 1—4 исходной постановки задачи. Ответ на вопрос пункта 8 был дан для любого r-регулярного графа G. Для кубических графов G мы рассмотрели случаи H – простой цепи и деревьев порядка ≤ 6. Пользуясь, в частности, теоремами 1—4, были организованы переборы, дающие ответы на вопросы пункта 5. Были предложены алгоритмы, дающие декомпозицию кубического графа на P_3 и P_4 за полиномиальное время и сформулированы теоремы, дающие ответ на вопрос, когда кубический граф декомпозируется на P_3 и P_4. Был сформулирован и доказан критерий для H-декомпозируемости кубического графа G на деревья со степенной последовательностью (3; 3; 1; 1; 1; 1). Для остальных деревьев из пункта 9 было получено необходимое условие. Для 4-регулярного графа в качестве графа H была рассмотрена клешня $K_{1,3}$ (получено необходимое условие). Таким образом были полностью решены пункты 1—8 и частично 9 исходной постановки задачи, а также получены некоторые результаты, выходящие за рамки исходной постановки задачи.

XVIII РТЮМ
Декабрь 2016, Минск

1 Некоторые очевидные замечания и определения

Приведем для начала некоторые утверждения и определения, которые будем использовать далее в работе, не останавливаясь на них подробно.

1. $m = \frac{r*n}{2}$, где m - количество ребер в r-регулярном графе, а n - его порядок.

2. H-декомпозиция графа G включает $|E(G)|/|E(H)|$ подграфов.

3. Если при рассматриваемой H-декомпозиции какие-то ребра, выходящие из вершины u графа G, входят в какой-то один граф декомпозиции и выходят из какой-то вершины v графа H, то будем говорить, что вершина v графа H *соответствует* вершине u графа G. И наоборот, будем говорить, что вершина из H соответствует вершине из G, если эта вершина из G соответствует этой вершине из H.

4. Если при рассматриваемой H-декомпозиции какая-то вершина v графа H соответствует вершине u графа G, то в графе H должны существовать такие вершины $v_1; v_2; \dots; v_k$ (возможно, какие-то из них совпадают), что $degu = degv + degv_1 + \dots degv_k$.

5. В кубическом графе порядок графа четен.

2 Общие рассуждения (пункты 1-4)

2.1 Теорема 1 (пункт 1)

Теорема 1. Если граф G допускает H-декомпозицию, то $|E(G)| \vdots |E(H)|$. В обратную сторону это утверждение неверно.

Доказательство. H-декомпозиция графа есть по сути разбиение его ребер, коих $|E(G)|$, на несколько подмножеств мощности $|E(H)|$ по определенным правилам. Суммарная мощность получившихся подмножеств равна мощности исходного, мощности подмножеств равны между собой, и подмножеств целое количество, допустим, k. Значит, $\exists k \in \mathbb{Z} \mid |E(G)| = |E(H)| * k \Leftrightarrow |E(G)| \vdots |E(H)|$. ⊠

Контрпример для обратного утверждения приведен на рис. 1.

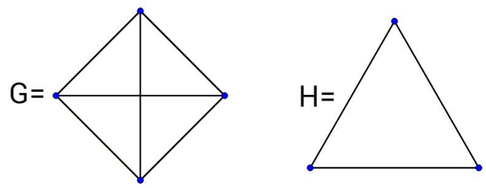


Рис. 1:

2.2 Теорема 2 (пункт 3)

Теорема 2. Если граф G допускает H-декомпозицию, то

$deg_G\ v \vdots$ НОД$(deg_H x \mid x \in V(H))$

Доказательство. Рассмотрим какую-то вершину x графа G. Ее степень равна сумме степеней вершин графов из декомпозиции. Все эти графы изоморфны H $\Rightarrow$ степень каждой вершины равна сумме степеней некоторых вершин из H $\Rightarrow$ степень любой вершины из G делится на НОД набора степеней тех вершин из H, которые соответствуют этой вершине из G $\Rightarrow$ степень любой вершины из G делится на НОД$\{deg\ x : x \in V(H)\}$.
$\boxtimes$

Контрпример к обратному утверждению приведен на рисунке 2.

Замечание. Из доказательства выше следует, что если граф r-регулярен, то НОД$(deg_H x \mid x \in V(H))$ делит r нацело.

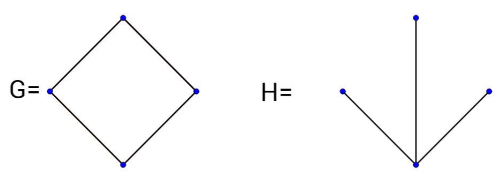


Рис. 2:

2.3 Теорема 3

Теорема 3. Пусть дан H-декомпозируемый граф G порядка n и построено мультимножество M по алгоритму из условия пункта 2. Тогда существует способ разбить M на n непересекающихся подмножеств так, что сумма элементов первого подмножества равна $deg\ v_1$, второго – $deg\ v_2$, третьего – $deg\ v_3$, и т. д., n-ого – $deg\ v_n$, где $\{v_i\}$ - последовательность вершин графа G

Доказательство. Для каждой вершины из G выделим в отдельное подмножество мощности тех вершин из H, которые ей соответствуют (возможно, какие-то мощности повторятся). Раз G H-декомпозируем, то для каждой вершины из G найдется такое подмножество M, они не будут пересекаться (одна и та же вершина одного и того же графа декомпозиции не может соответствовать нескольким вершинам G одновременно), и каждая вершина H будет задействована ровно k раз, т. е. каждый элемент M попадет в какое-то подмножество. ⊠

Следствие 1. Если G – r-регулярный H-декомпозируемый граф, то для каждой вершины x степени меньше r из H $\exists$ несколько вершин из H суммарной степенью $r - deg\ x$

Следствие 2. Если G – r-регулярный H-декомпозируемый граф, то в H вершин степени r-1 не больше, чем вершин степени 1.

Следствие 3. Если G – H-декомпозируемый граф, то в H нет вершин степени больше max($deg\ x$: $x \in V(G)$).

2.4 Теорема 4

Теорема 4. Если H содержит подграф Γ такой, что Γ не содержится в G, то G не является H-декомпозируемым.

Доказательство. Пусть это не так. Рассмотрим вершины из H, образующие Γ. Рассмотрим вершины в графе G, соответствующие этим вершинам из H. Они должны также образовывать Γ, т. к. между двумя такими вершинами есть ребро тогда и только тогда, когда оно есть между соответствующими им вершинами в H. Противоречие. ⊠

Следствие 4. Если в G нет цикла длины l, а в H он есть, то G не является H-декомпозируемым.

2.5 Рассуждения по поводу пункта 2

Очевидно, что M состоит из k одинаковых подмножеств. Более того, каждое из этих подмножеств должно являться степенной последовательностью некого графа. Теорема Эрдеша – Галлаи вместе с вышесказанными замечаниями дает условие для того, чтобы множество чисел являлось мультимножеством M для какого-то графа. Итак, множество является мультимножеством M для каких-то графов G и H тогда, когда множество полностью разбивается на несколько одинаковых степенных последовательностей.

Также определенным условием для M является теорема 3.

2.6 Пример для пункта 4

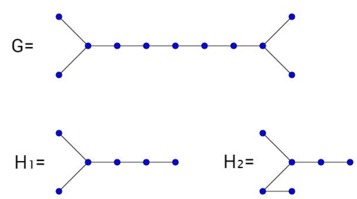


Рис. 3:

2.7 Клешни $K_{1,r}$ и r-регулярные графы

Пусть какой-то r-регулярный граф G декомпозируем на клешни. Разобьем все его вершины на два типа: те, которые соответствуют вершине степени r в графе H (клешне), и те, которые соответствуют каким-то r вершинам степени 1 каких-то r клешен. Очевидно, эти множества не пересекаются. Очевидно, никакие две вершины из первой группы не соединены ребром (это следует из того, что типы вершин не пересекаются). Также очевидно, что никакие две вершины второго типа не соединены ребром. Следовательно, граф G – r-регулярный двудольный.

Рассмотрим r-регулярный двудольный граф. В нем с одной стороны $r * m$, а с другой $r * l$ ребер, где m и l – количества вершин в разных долях. Значит, $m = l = n/2$.

Достаточность полученного условия просто проверить. Действительно, алгоритм построения декомпозиции следующий: для каждой вершины из одной доли выделяем в отдельную клешню r ребер, выходящих из нее.

Итак, на клешни $K_{1,r}$ среди r-регулярных декомпозируются только двудольные r-регулярные графы с равными долями.

3 Кубические графы G

В этой части работы мы рассмотрим случаи различных G и H и ответим, в частности, на вопросы пунктов 5, 6, 7, 8 и частично 9. Сразу заметим, что случаи несвязных G и/или H мы рассматривать не будем.

3.1 Простые цепи длины больше 4 (пункт 6)

Докажем, что никакой кубический граф не декомпозируется на простые цепи больше чем из четырех вершин. Пусть это не так. В каждой такой простой цепи только по две вершины степени 1, а по **следствию 2** из **теоремы 3** вершин степени 2 в них должно быть не больше двух, но в простых цепях длины более 4 таких вершин всегда больше двух. Противоречие. ⊠ Следовательно, верна **теорема**:

Теорема 5. Никакой кубический граф не декомпозируем на простые цепи длины более 4.

3.2 Клешня (пункт 8)

Этот пункт является частным случаем рассмотренного в первой части работы случая r-регулярного графа и клешни $K_{1,r}$ для $r = 3$.

3.3 P_3

Теорема 6. Связный граф P_3-декомпозируем тогда и только тогда, когда число ребер в нем четно.

Доказательство. Согласно теореме 1, если граф P_3-декомпозируем, то число его ребер должно делиться на 2. Докажем это утверждение в обратную сторону.

Лемма. Дерево с четным числом ребер P_3-декомпозируемо.

Доказательство. Разделим дерево на уровни. Возьмем произвольную вершину и отнесем ее к первому уровню, ее окружение отнесем ко второму уровню, окружения вершин второго уровня, не считая вершины первого уровня, отнесем к вершинам третьего уровня ... окружения вершин i-ого уровня, не считая вершины уровней с номером i-1 ,отнесем к (i+1)-ому уровню. Узлами будем называть вершины степени больше 2. Рассмотрим узел с самым большим номером уровня (обозначим этот номер за k). От него будут отходить простые цепи, вторым концом которых являются вершины уровня с номером больше k; эти цепи мы будем называть ветвями.

Первый случай. Сумма количества ребер в ветвях, отходящих от какого-то узла с наибольшим номером уровня, четна. Ветви с четным числом ребер мы естественным образом декомпозируем на P_3. В этом случае количество ветвей с нечетным числом ребер четно, поэтому мы сможем разбить их на пары, что мы и сделаем. Две ветви в паре мы будем объединять в одну простую цепь четной длины, проходящую через узел, каждую из таких простых цепей мы также можем декомпозировать на P_3.

Второй случай. Сумма количества ребер в ветвях нечетна. В этом случае мы на время забываем про одну ветвь нечетной длины и декомпозируем ветви так же, как и в первом случае. Цепь с нечетным числом ребер мы объединяем с ребром, состоящим из узла и вершины (k-1)-ого уровня, с которой смежен узел (такая вершина есть у всех вершин, кроме вершины первого уровня, этот случай мы упомянем позже) и декомпозируем ее на P_3.

Теперь мы забываем про декомпозированную часть и проделываем ту же самую операцию с оставшейся частью дерева. Заметим, что после завершения каждой операции мы убираем четное число ребер, поэтому в оставшейся части графа тоже всегда будет оставаться четное число ребер. Так мы будем делать до тех пор, пока не останется либо один узел, который будет представлять собой вершину первого уровня, в этом случае мы декомпозируем ветви согласно 1-ому случаю; либо простая цепь с четным числом ребер, которую мы тоже можем легко декомпозировать.

Лемма доказана. ⊠

Для доказательства теоремы остается показать, что любому связному кубическому графу с четным числом ребер мы сможем сопоставить такое дерево с таким же числом ребер, что из возможности декомпозировать которое будет следовать возможность декомпозировать исходный граф.

Опишем процесс построения такого дерева. Основой его будет пустой граф, вершины которого поставим во взаимно однозначное соответствие с вершинами исходного графа. Возьмем произвольную вершину графа и присвоим ей первый уровень (уровни будем присваивать так же, как и в доказательстве **леммы**), проведем из нее все ребра, соответствующие ребрам исходного графа (если эта вершина смежна с какой-то вершиной v исходного графа, то она будет смежна с вершиной соответствующей вершине v).

По очереди будем рассматривать вершины второго уровня. Рассматривая вершину, будем проводить из нее все ребра, которые еще не проведены. Если рассматриваемая вершина v смежна с какой-то вершиной второго уровня, либо с вершиной третьего уровня, к которой мы уже проводили ребра (назовем эту вершину u), то мы построим копию вершины u, которая будет смежна с вершиной v. Когда мы будем рассматривать вершину u, мы не будем ее соединять ребром с вершиной v. Рассматривая копии вершин, вообще не будем проводить из них ребра. Только рассмотрев все вершины второго уровня, будем приступать к рассмотрению вершин третьего уровня.

Такую же операцию будем проделывать с вершинами каждого уровня, пока процесс не остановится. Заметим, что в полученном графе столько же ребер, сколько и в исходном. Вершина v i-того уровня не может быть связана с вершиной u k-ого уровня, где $k < i-1$, либо $k > i+1$, либо $k = i$. В первом случае вершина v была бы вершиной $k+1 < i$ уровня, во втором случае вершина u была бы вершиной $i+1 < k$ уровня, третий случай невозможен по построению. Также заметим, что каждая вершина v i-ого уровня связана ровно с одной вершиной $(i-1)$-ого уровня по построению (мы строили бы копию вершины v).

Ввиду описанных в предыдущем абзаце свойств, любая цепь построенного графа содержит вершины разных уровней, поэтому в нем нет циклов, а значит он дерево по определению. Теорема доказана. ⊠

Заметим, что в ходе доказательства теоремы мы описали алгоритм построения P_3-декомпозиции кубического графа с четным числом ребер, работающий за полиномиальное число шагов.

3.4 P_4

3.4.1 Утверждение 1

Утверждение 1. *Паросочетанием* назовем такое подмножество множества ребер графа, что никакие два ребра из этого подмножества не смежны. Будем называть паросочетание совершенным, если в нем ровно n/2 ребер. Если в кубическом графе G есть совершенное паросочетание, то можно построить декомпозицию на P_4 за полиномиальное ($p(n)$, где n - порядок графа G) количество шагов.

Доказательство. Приведем заявленный алгоритм, который заодно докажет существование такой декомпозиции.

Вначале, воспользовавшись алгоритмом Эдмондса, который за полиномиальное время ищет наибольшее паросочетание, проверяем наличие совершенного паросочетания и получаем его при его существовании. Затем за полиномиальное же количество шагов строим вспомогательный граф, который представляет собой G без найденного паросочетания. В полученном графе степень каждой вершины равна 2, а значит, мы можем на каждом ребре за полиномиальное число шагов отметить направление так, что в каждую вершину одно ребро будет входить и одно – выходить. Это следует из того, что каждая компонента связности являет собой простой цикл, что очевидно из того, что у каждой вершины степень 2. Теперь перенесем эти направления на исходный граф G. Теперь для каждого ребра паросочетания будем выделять на графе G простой путь из следующих трех ребер: ребро паросочетания и два ребра, которые входят в вершины выбранного ребра паросочетания. Простой путь эти ребра могут не образовать только в двух случаях: если два последних ребра выходят из одной вершины, что невозможно, т. к. из каждой вершины выходит только одно ребро, и если какое-то из этих ребер мы включили ранее в другой P_4, что также невозможно, т. к. для каждого ребра есть только одна вершина, в которую он входит. Так для каждого ребра паросочетания построим P_4, и снова за полиномиальное число шагов. Таким образом, утверждение доказано. ⊠

3.4.2 Утверждение 2

Утверждение 2. Если существует P_4-декомпозиция графа, то в графе существует совершенное паросочетание.

Доказательство. Сначала заметим, что каждая вершина из G при любой декомпозиции соответствует какой-то вершине степени 2 и какой-то вершине степени 1.

Пусть это не так. В мультимножестве M есть только двойки и единицы. Пусть при каком-то разбиении его на подмножества, соответствующем какой-то декомпозиции, мы получили какое-то подмножество, отличное от $\{2; 1\}$. Это может быть только $\{1; 1; 1\}$. Поскольку в любом другом подмножестве двоек не больше, чем единиц, а в этом единиц строго больше, то и во всем M единиц больше, чем двоек. Но поскольку в P_4 есть ровно 2 вершины степени 1 и ровно 2 вершины степени 2, то в M единиц и двоек поровну. Противоречие.

Следовательно, каждая вершина инцидентна среднему ребру какой-то простой цепи из декомпозиции, и только одному. Выделим все эти ребра. Никакие два из них несмежны, и у них n вершин $\Rightarrow$ они являются совершенным паросочетанием. Утверждение доказано. ⊠

Из этих двух утверждений очевидным образом следует **теорема**:

Теорема 7. Кубический граф G P_4-декомпозируем тогда и только тогда, когда в нем есть совершенное паросочетание.

3.5 Граф 2,3-диметилбутана

Примечание: в этой части работы будем под H подразумевать следующий граф:

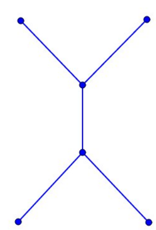


Рис. 4:

Для начала докажем некоторые признаки, необходимые для того, чтобы кубический граф декомпозировался на графы 2,3-диметилбутана. Во-первых, число ребер, а, значит, и вершин, в таком графе должно делиться на 5. Отсюда очевидно, что в декомпозиции $3 * n/10$ графов.

Теперь пусть граф G является H-декомпозируемым. *Особыми* относительно данной декомпозиции (или просто особыми) будем называть ребра, которые соответствуют ребрам из H, соединяющим вершины степени 3. Вершины будем называть особыми, если они инцидентны хоть одному особому ребру. Очевидно, количество особых ребер равно $3 * n/10$, а особых вершин - $3 * n/5$.

Лемма 1. Каждое ребро в G инцидентно хоть одной особой вершине.

Доказательство. Рассмотрим граф H. Заметим, что в нем каждое ребро инцидентно хотя бы одной особой вершине. Следовательно, в G каждое ребро также инцидентно какой-то особой вершине. ⊠

Лемма 2. В G никакие две вершины, не являющиеся особыми (далее будем называть их для краткости *неособыми*), не смежны.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда есть ребро, соединяющее две неособые вершины. Получаем противоречие с леммой 1. ⊠

Лемма 3. Каждая особая вершина в G смежна ровно с одной особой вершиной.

Доказательство. Заметим, что каждая особая вершина смежна только с вершинами, принадлежащими тому же графу декомпозиции, что и она сама. Рассмотрим этот граф декомпозиции. Из этих трех вершин одна связана с ней особым ребром, а две другие – нет. Значит, каждая особая вершина смежна ровно с 1 особой вершиной. ⊠

Теперь заметим, что особые вершины можно разбить на два независимых множества. Вместе с леммой 2 это дает нам тот факт, что граф G – трехдольный. Действительно, одну долю составляют неособые вершины, вторую – половина особых, и третью – другая половина особых. В этом случае строго определены размеры долей: одна доля имеет мощность $2 * n/5$, а две другие – $3 * n/10$. Более того, каждая вершина из каждой из равномощных долей смежна ровно с одной вершиной из другой равномощной доли.

На основании трехдольности графа докажем следующее утверждение:

Лемма 4. В G нет треугольников.

Доказательство. Пусть это не так. Из трехдольности G следует, что возможен только треугольник, в котором две вершины – особые, а одна – неособая. Это означает, что какая-то неособая вершина соединена с двумя смежными особыми вершинами. Значит, все ребра треугольника принадлежат одному и тому же графу декомпозиции (это следует из того, что все ребра, инцидентные одной и той же особой вершине принадлежат одному и тому же графу декомпозиции). Следовательно, в каком-то графе декомпозиции есть треугольник. Получаем очевидное противоречие. ⊠

Итак, граф G должен представлять из себя кубический трехдольный граф без треугольников порядка $10 * k$ с долями размеров $3k$ $3k$ и $4k$, в котором каждая вершина из каждой из равномощных долей смежна ровно с одной вершиной из другой равномощной доли.

Покажем, что выполнения этих условий достаточно для того, чтобы G был H-декомпозируемым.

Пусть G подходит под все эти условия. Тогда будем помещать в отдельный граф декомпозиции: а) какое-то ребро из соединяющих вершины из равномощных долей; б) все ребра, имеющие с этим ребром общую вершину.

В результате получим H-граф. Действительно, мы выделили в отдельный подграф 5 ребер, получившийся подграф имеет 2 вершины степени 3 и 4 вершины степени 1 (это следует из отсутствия в G треугольников) $\Rightarrow$ Мы выделили H-граф.

Таким образом, можно сформулировать **теорему 9**:

Теорема 9. Кубический граф G H-декомпозируем тогда и только тогда, когда он имеет порядок $10k$, $k \in \mathbb{N}$, в нем нет треугольников, он трехдольный с долями мощностей $4k$, $3k$ и $3k$ и каждая вершина из каждой из равномощных долей смежна ровно с одной вершиной из другой равномощной доли.

3.6 Граф куба

По теореме 1 $|E(H)| \in \{1;2;3;4;6\}$. По теореме 2 НОД$\{deg\ x : x \in V(H)\}$ $= 1$ или 3, т. к. степень всех вершин равна 3. Из следствия 4 имеем, что H является или деревом, или циклом на шести вершинах, или имеет цикл длины 4.

Сразу рассмотрим два последних случая. у цикла длины 6 НОД$\{deg$ $x : x \in V(H)\} = 2$, что противоречит условию теоремы 2.

У цикла длины 4 есть аналогичная проблема. Значит, H не является деревом только если в него входит цикл длины 4 и еще ровно 2 ребра (чтобы всего ребер было 6). При этом треугольников в H быть не может. Возможны 3 варианта. Первый вариант противоречит следствию 2:

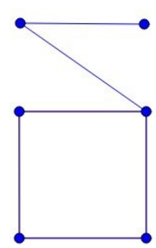
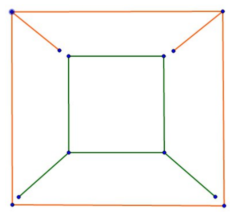
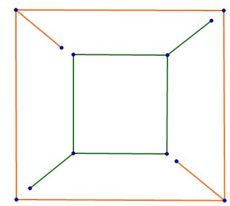


Рис. 5:

Примеры для второго и третьего графов:





3.6.1 Граф куба и деревья

Теперь рассмотрим деревья.

Как известно, у дерева на n вершинах ровно n-1 ребро. Также, в H не может быть вершин степени более 3. Эти два факта существенно упрощают перебор, который мы и будем осуществлять.

Декомпозировать граф куба на H, состоящий из одного ребра, можно. Это очевидно.

Алгоритмы построения декомпозиций на цепи P_3, P_4 и клешни $K_{1,3}$ указаны выше в соответствующих пунктах.

В случае $|E(H)| = 4$ возможно только дерево вида

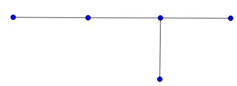


Рис. 6:

т.к. $K_{1,4}$ недопустим; P_5 был рассмотрен выше.

Граф куба декомпозируется на дерево с рис. 4 следующим образом:

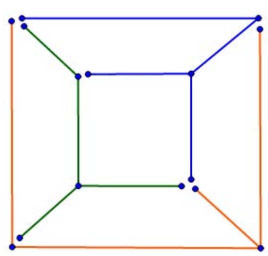


Рис. 7:

Осталось рассмотреть только случай $|E(H)| = 6$.

Замечание 1. Заметим, что в этом случае мультимножество из теоремы 3 для каждой вершины состоит не более, чем из 2 элементов, т. к.

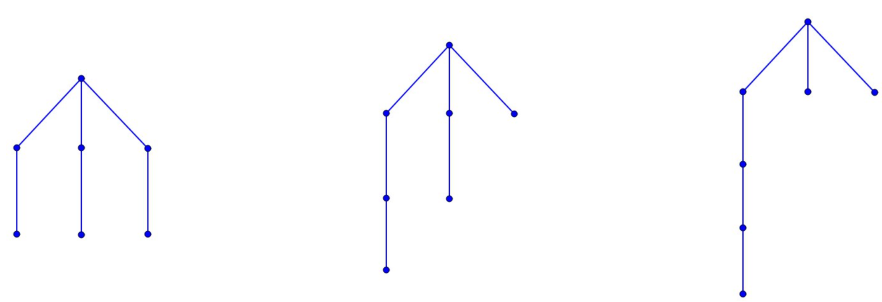
всего в декомпозиции только 2 графа, а значит, каждая вершина графа куба соответствует не более чем 2 вершинам из графа H. Следовательно, в этом случае не только вершин степени 2 не более, чем вершин степени 1, но и наоборот, т. к. каждой вершине степени 1 из одного графа декомпозиции соответствует отдельная вершина степени 2 из другого графа декомпозиции, изоморфного первому. следовательно, в H поровну вершин степени 1 и 2.

Очевидно, в H есть вершина степени 3, иначе это простая цепь длины 6, а это противоречит теореме 5. Далее, таких вершин не более 4, т. к. суммарная степень всех вершин равна 12. Очевидно, вершин степени 3 не может быть ровно 4, иначе H - полный граф на 4 вершинах, а он содержит треугольники, что недопустимо.

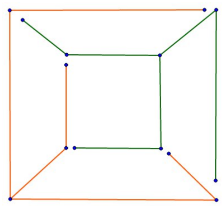
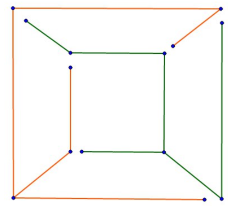
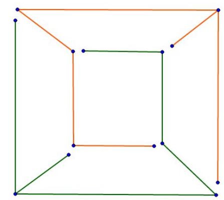
Пусть вершин степени 3 в H ровно 3. Рассмотрим все ребра, которым они инцидентны. Их 9-x, где x – количество ребер, которые мы посчитали дважды. Очевидно, трижды и более мы не могли посчитать никакое ребро, т. к. у каждого ребра только две вершины. По два раза мы посчитали только те ребра, которые соединяют вершины степени 3. Их, с одной стороны, не менее 3, т. к. в графе только 6 ребер, а с другой – не более 2, т. к. на трех вершинах можно провести только два ребра так, чтобы не образовался треугольник. Противоречие.

Значит, в H только 1 или 2 вершины степени 3. Рассмотрим сначала деревья с двумя вершинами степени 3. Заметим, что в этом случае в дереве вершин степеней 1 и 2 суммарно 5 штук, а значит, их не может быть поровну. Имеем противоречие с замечанием 1.

Следовательно, в H может быть только ровно 1 вершина степени 3. При этом из замечания следует, что также у нас поровну вершин степени 1 и 2 – по 3 штуки. Деревьев, удовлетворяющих этим двум условиям, осталось 3:



Граф куба можно декомпозировать на каждое из них:

Таким образом, мы для любого графа H определили, является ли граф куба H-декомпозируемым.

3.7 Граф Петерсена

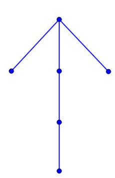
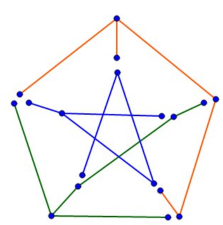
Из теоремы 1 следует, что в H может быть только 1, 3 или 5 ребер. Из следствия 4 имеем, что в H могут быть только циклы длины не менее 5. Однако циклы длины более 5 не могут присутствовать в графе H на 1, 3 или 5 ребрах; а цикл длины 5 не может быть графом H, т. к. не удовлетворяет условию теоремы 2. Следовательно, H всегда является деревом.

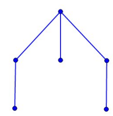
Граф Петерсена очевидным образом декомпозируется на графы, состоящие из одного ребра.

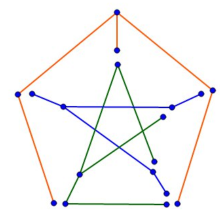
Из теоремы Петерсена о том, что в кубическом графе без мостов есть совершенное паросочетание и **теоремы 8** имеем, что граф Петерсена P_4-декомпозируем.

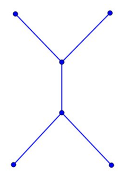
В графе Петерсена есть цикл длины 5, следовательно, он не является двудольным, следовательно, он не декомпозируется на клешни.

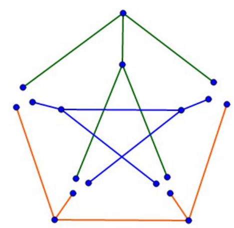
Декомпозиции на все графы на 5 ребрах, удовлетворяющие очевидным условиям, приведены ниже на рисунках.







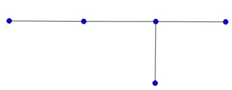


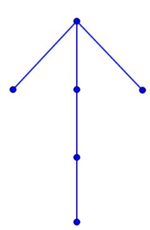
3.8 Необходимое условие для некоторых графов H

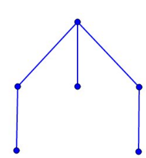
Лемма 4. Если в дереве H есть ровно одна вершина степени 3 и G H-декомпозируем, то в G есть независимое подмножество мощности как минимум $\frac{3*n}{2*|E(H)|}$.

Доказательство. Очевидно, вершина, соответствующая вершине степени 3 из H, соответствует только ей. Так же очевидно, что все вершины из G, смежные с какой-то вершиной, соответствующей вершине степени 3 из H, имеют степень меньше 3, т. к. они соответствуют каким-то другим вершинам из H, а в H только одна вершина степени 3 по условию. То есть, никакие две вершины, соответствующие вершине степени 3 из H, не смежны. Значит, все вершины, соответствующие вершине степени 3 из H, образуют независимое подмножество. Посчитаем количество таких вершин. Их столько же, сколько графов в H-декомпозиции графа G, количество которых, в свою очередь, равно $|E(G)|/|E(H)| = \frac{3*n}{2*|E(H)|}$. ⊠

Доказанная выше лемма дает необходимое условие для того чтобы G был H-декомпозируемым для следующих графов H:







К сожалению, никаких достаточных условий для этих графов нам привести не удалось.

4 Клешни $K_{1,3}$ и 4-регулярные графы

Теорема 9. Если 4-регулярный граф G $K_{1,3}$-декомпозируем, то в нем есть независимое подмножество мощности $n/3$.

Доказательство. Разделим вершины в G на два непересекающихся подмножества: вершины, которым соответствуют вершины степеней 3 и 1, и вершины, которым соответствуют четыре вершины степени 1. Количество первых равно $2 * n/3$, а вторых, соответственно – $n/3$. Теперь рассмотрим какое-нибудь ребро, выходящее из вершины вида (1; 1; 1; 1). В каком-то графе декомпозиции оно соединяет вершину степени 1 и вершину степени 3. Следовательно, т. к. рассматриваемая вершина соответствует только вершинам степени 1, то это ребро соединяет ее с вершиной вида (3; 1). Аналогично для всех остальных ребер, выходящих из какой-то вершины вида (1; 1; 1; 1). Следовательно, вершины вида (1; 1; 1; 1) смежны только с вершинами (3; 1). Следовательно, все такие вершины (а их ровно $n/3$) образуют независимое подмножество. $\boxtimes$