Исследовательские задачи для Республиканской летней школы 2017

Давид Юрьевич Змейков

1. Футбол философа

Футбол философа – эта игра для двоих человек на прямоугольной доске $m \times n$. Имеется два типа фишек: одна черная фишка ("мяч") и много белых фишек ("футболисты"). В начале доска пуста за исключением одного поля, на котором лежит мяч.

Игроки по очереди совершают на выбор одно из следующих действий: 1) либо добавить одного футболиста на свободное поле, 2) либо сделать сколько угодно последовательных прыжков мячом. Прыжком считается перескок через несколько подряд стоящих футболистов до первого свободного поля, при этом все футболисты, через которых перескочил мяч, убираются. Прыжок разрешается сделать в одном из восьми направлений: по горизонтали, вертикали или диагонали.

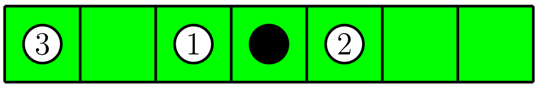

Рис. 1. На доске 1×7 выигрывает первый игрок.

Цель игры заключается в том, чтобы выбросить мяч за пределы доски. Первый игрок выигрывает, если мяч выпрыгнет за левый борт доски, а второй выигрывает – если за правый. Например, на доске 1×7 с мячом в центре доски выиграет первый. На самом деле, если например в позиции, указанной на рисунке 1, второй игрок перепрыгнет через футболиста номер 2, то первый игрок снова поставит на это поле футболиста и выигрыш ему гарантирован на следующем ходе.

Задача. Если даны m, n и начальная позиция мяча, кто выиграет и каким образом?

2. Разложение Пирса

Пусть $a > b$ произвольные натуральные числа. Рассмотрим рекуррентную последовательность $(b_i)_{i \geq 0}$, в которой $b_0 = b$ и b_{i+1} равен остатку числа a при делении на b_i:

$$b_{i+1} = a \bmod b_i \quad \text{для любого } i \geq 0.$$

Определим $P(a, b)$ как наименьшее натуральное число n такое, что $b_n = 0$.

Задача. Найдите верхние и нижние оценки для $P(a, b)$, зависящие только от a. Докажите, например, что $P(a, b) \leq Ca^{1/3}$ для некоторой константы $C \in \mathbb{R}$ и попытайтесь улучшить эту оценку.

3. Многоугольники с целочисленными вершинами

1. Дан треугольник с целыми длинами сторон и рациональной площадью. Докажите, что его можно расположить на плоскости так, чтобы у всех его вершин были целые координаты.

2. Дан выпуклый многоугольник, все стороны и диагонали которого имеют целые длины. Докажите, что если площадь многоугольника целая, то его можно расположить на плоскости так, чтобы у всех его вершин были целые координаты.

3. Исследуйте трехмерные аналоги задачи.

4. Наибольшие хорды многоугольников.

Рассмотрим выпуклый n-угольник P с длинами сторон $a_1, \ldots, a_n$. Обозначим через b_i длину наибольшей хорды P, параллельной i-ой стороне. (*Хордой* называется отрезок с концами на сторонах или в вершинах многоугольника.)

1. Докажите, что

$$\sqrt{8} < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \leqslant 4.$$

Когда выполняется равенство?

2. Верно ли, что

$$3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \ ?$$

3. Попытайтесь найти трехмерные аналоги этих неравенств.

5. Антиподы в графах

Путем в неориентированном графе называется последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$, такая что любые два ребра e_i и e_{i+1} имеют общую вершину. *Длина* пути определяется как число ребер в нем. *Геодезическая* между двумя вершинами – это путь наименьшей длины, соединяющий данные вершины. Заметим, что геодезических между двумя вершинами может быть несколько. *Расстоянием* между двумя вершинами графа называется длина любой геодезической между ними.

Задача А. Какие графы обладают тем свойством, что между любыми двумя его вершинами существует **ровно** одна геодезическая?

Задача Б. У каждой вершины v графа есть хотя бы один *антипод*, то есть вершина, находящаяся дальше всего от v. Опишите графы, в которых каждая вершина имеет **ровно** один антипод.

6. Аппроксимации

1. Рассмотрим следующее множество рациональных чисел:

$$U = \left\{ x - \frac{1}{x} \ \mid \ x \in \mathbb{Q},\, x \neq 0 \right\}.$$

(1) Докажите, что U всюду плотно на действительной прямой (то есть для любого непустого интервала $I \subset \mathbb{R}$ существует элемент $r \in U$, который лежит в I)?
(2) Обозначим через aU множество всех произведений ar, где $r \in U$. Покажите, что для любого действительного $a \neq 0$, множество aU также всюду плотно в $\mathbb{R}$.

2. Изучите произведения $aU \cap bU$, где a и b – целые числа. В частности, проверьте, является ли множество $aU \cap bU$:

а) пустым; б) бесконечным; в) всюду плотным в $\mathbb{R}$.

3. Пусть $n > 2$ – натуральное число. Исследуйте пересечения $a_1U \cap \ldots \cap a_nU$, где числа $a_1, \ldots, a_n$ являются целыми.

4. Более обшо, пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ какая-то действительная функция с областью определения $D \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим следующее множество

$$U_f = \{ f(x) \ \mid \ x \in \mathbb{Q} \cap D \} \,.$$

Например, в предыдущих вопросах $U = U_f$ для $f(x) = x - 1/x$ и $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Проверьте плотность множеств $a_1 U_f \cap \ldots \cap a_n U_f$, где n натурально и $a_1, \ldots, a_n$ целые, в следующих случаях:

(1) f – многочлен с целыми коэффициентами;
(2) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены с целыми коэффициентами (начните с многочленов степени не большей 2);
(3) f – тригонометрическая функция;
(4) $f(x) = \frac{S(x)}{T(x)}$, где $S(x)$ и $T(x)$ – тригонометрический многочлены с целыми коэффициентами.

5. Предложите и исследуйте дополнительные направления.