Исследовательские задачи для Республиканской летней школы 2019

Давид Юрьевич Змейков

1. Вложение одного треугольника в другой

Обозначим через P и Q треугольники с длинами сторонами p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 соответственно. Какие условия (необходимые и/или достаточные) нужно наложить на p_i и q_i, чтобы в треугольнике P можно было поместить треугольник Q?

2. Многоугольники с целочисленными вершинами

1. Дан треугольник с целыми длинами сторон и рациональной площадью. Докажите, что его можно расположить на плоскости так, чтобы у всех его вершин были целые координаты.

2. Дан выпуклый многоугольник, все стороны и диагонали которого имеют целые длины. Докажите, что если площадь многоугольника целая, то его можно расположить на плоскости так, чтобы у всех его вершин были целые координаты.

3. Исследуйте трехмерные аналоги задачи.

3. Антиподы в графах

Путем в неориентированном графе называется последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$, такая что любые два ребра e_i и e_{i+1} имеют общую вершину. *Длина* пути определяется как число ребер в нем. *Геодезическая* между двумя вершинами – это путь наименьшей длины, соединяющий данные вершины. Заметим, что геодезических между двумя вершинами может быть несколько. *Расстоянием* между двумя вершинами графа называется длина любой геодезической между ними.

Задача А. Какие графы обладают тем свойством, что между любыми двумя его вершинами существует **ровно** одна геодезическая?

Задача Б. У каждой вершины v графа есть хотя бы один *антипод*, то есть вершина, находящаяся дальше всего от v. Опишите графы, в которых каждая вершина имеет **ровно** один антипод.

4. Разложение Пирса

Пусть $a > b$ произвольные натуральные числа. Рассмотрим рекуррентную последовательность $(b_i)_{i\geq 0}$, в которой $b_0 = b$ и b_{i+1} равен остатку числа a при делении на b_i:

$$b_{i+1} = a \bmod b_i \quad \text{для любого } i \geq 0.$$

Определим $P(a,b)$ как наименьшее натуральное число n такое, что $b_n = 0$.

Задача. Найдите верхние и нижние оценки для $P(a,b)$, зависящие только от a. Докажите, например, что $P(a,b) \leq Ca^{1/3}$ для некоторой константы $C \in \mathbb{R}$ и попытайтесь улучшить эту оценку.

5. Бинарные расстановки кругов и многоугольников

1. Имеется n кругов единичного радиуса. Их разместили в круге радиуса R, так чтобы никакая прямая не пересекала более двух кругов единичного радиуса. Каково минимальное значение R?

2. Имеется n правильных k-угольников со стороной один. Их разместили в правильном k-угольнике со стороной S так, чтобы каждый единичный k-угольник был гомотетичен исходному (коэффициент гомотетии положителен) и никакая прямая, параллельная сторонам k-угольника, не пересекала более двух k-угольников со стороной один. Каково минимальное значение S?

6. Аппроксимации

1. Рассмотрим следующее множество рациональных чисел:

$$U = \left\{ x - \frac{1}{x} \;\mid\; x \in \mathbb{Q},\, x \neq 0 \right\}.$$

(1) Докажите, что U всюду плотно на действительной прямой (то есть для любого непустого интервала $I \subset \mathbb{R}$ существует элемент $r \in U$, который лежит в I)?

(2) Обозначим через aU множество всех произведений ar, где $r \in U$. Покажите, что для любого действительного $a \neq 0$, множество aU также всюду плотно в $\mathbb{R}$.

2. Изучите произведения $aU \cap bU$, где a и b – целые числа. В частности, проверьте, является ли множество $aU \cap bU$:

а) пустым; б) бесконечным; в) всюду плотным в $\mathbb{R}$.

3. Пусть $n > 2$ – натуральное число. Исследуйте пересечения $a_1 U \cap \ldots \cap a_n U$, где числа $a_1, \ldots, a_n$ являются целыми.

4. Более общо, пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ какая-то действительная функция с областью определения $D \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим следующее множество

$$U_f = \{ f(x) \;\mid\; x \in \mathbb{Q} \cap D \}.$$

Например, в предыдущих вопросах $U = U_f$ для $f(x) = x - 1/x$ и $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Проверьте плотность множеств $a_1 U_f \cap \ldots \cap a_n U_f$, где n натурально и $a_1, \ldots, a_n$ целые, в следующих случаях:

(1) f – многочлен с целыми коэффициентами;

(2) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены с целыми коэффициентами (начните с многочленов степени не большей 2);

(3) f – тригонометрическая функция;

(4) $f(x) = \frac{S(x)}{T(x)}$, где $S(x)$ и $T(x)$ – тригонометрический многочлены с целыми коэффициентами.

5. Предложите и исследуйте дополнительные направления.