XXV республиканская летняя научно-исследовательская школа «Бригантина‑2021»

**Темы (задачи) для научных исследований по**

**МАТЕМАТИКЕ**

**Примечания.**  1) В списке тем могут дополнения и изменения.

2) Среди тем есть ***как очень сложные*** (с идеей реального продолжения и подготовки работ на Республиканские и Международные конференции и конкурсы, а также с последующей публикацией в научных изданиях), так и относительно простые (особенно для начала процесса исследования) – часто рядом с такими темами (задачами) или после условия стоит специальное примечание. Последнее, однако, не означает, что такая задача является в чем-то ущербной – при соответствующем погружении в задачу и получении определенных результатов любая задача превратится в достойную тему для представления на любом уровне!

В любом случае, если кто-то из руководителей предлагает некоторую тему для исследования, значит, он видит в ней определенный смысл и интерес в развитии и получении результатов!!!

3) Участники школы могут продолжать исследования по темам, ранее разрабатываемым в своих учебных заведениях. ***Для этого в первые два дня работы необходимо заявить свою тему одному из ответственных за научные семинары по математике*** (Гинзбург А.А., Задворный Б.В., Калинчук В.Н., Лавринович Л.И., Чурбанов Ю.Д.) и согласовать порядок работы с научным руководителем.

4) В качестве тем для исследования можно выбирать темы (исследовательские задания) из других источников, в частности, из списка заданий проблемного (научного) семинара по математике, заданий турниров юных математиков – от Минского городского (5-7 классы), республиканского (см. на сайте [www.uni.bsu.by](http://www.uni.bsu.by)), международного ([www.itym.org](http://www.itym.org)) и т.п.

**Задворный Б.В. и другие**

**1. Мудрецы.** **(«*можно начинать с 7-8 класса*»)**

Хорошо известна следующая задача: «Три мудреца А, В и С участвуют в конкурсе на сообразительность. Ведущий просит их закрыть глаза, предупреждает, что оденет на каждого из низ красную или синюю шляпу (на самом деле одевает на каждого – красную), затем просит открыть глаза и поднять руку тех, кто видит на ком-либо из соседей красную шляпу. Естественно все трое сразу подняли руку. Задание: кто быстрее всех догадается какого цвета шляпа на его голове, тот будут победителем (своих шляп мудрецы не видят, они безошибочно могут делать различные логические рассуждения, только с разной скоростью). Мудрецы задумались; наконец, кто-то из них сказал: «Я знаю, на мне красная шляпа.» Как он рассуждал.»

Исследование состоит в следующем: изучить возможность распространения этой задачи на *п* мудрецов (возможно, с дополнительными условиями). В частности, для двух мудрецов задача тривиальна.

**2. Необычная игра в крестики-нолики на доске *m*×*n***. **(«*можно начинать с 7-8 класса*»).**  Правила игры остаются старыми, с той лишь разницей, что каждый игрок на своем ходу может поставить либо крестик, либо нолик по своему желанию. Побеждает тот, кто первый поставит ряд из трех (четырех, …) одинаковых фигур. Кто выиграет при правильной игре и почему? (*Источник для случая доски* 3×3 *– «Командно-личный турнир школьников «Математическое многоборье»,* 2008-2010,МЦНМО-2012)

**3. Карлсон и варенье (РТЮМ-2015)**

**I. а)** У Карлсона есть 27 банок с вареньем. В банках находится 1, 2, 3, …, 27 литров варенья соответственно. На завтрак Карлсон может съесть одно и то же целое число литров варенья из любых двух банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье. Может ли Карлсон съесть все варенье, если вначале было 29 банок, в которых содержалось 1, 2, …, 29 литров варенья?

**б)** Попробуйте указать все натуральные значения *n*, при которых Карлсон может съесть варенье из *n* банок, в которых содержатся 1, 2, 3, …, *n* литров варенья. При этом если при каких-то *n* он может это сделать, опишите алгоритм «съедания», а при остальных докажите, что такое невозможно. В первом случаем при каждом *n* постарайтесь найти минимально возможное количество завтраков («съеданий»), за которое Карлсон может съесть варенье.

**в)** Попробуйте доказать, что алгоритм «съедания», предложенный вами в предыдущем пункте является оптимальным с точки зрения минимальности количества операций (под одной *операцией* будем понимать одно «съедание» по одинаковому числу литров из двух банок, при этом в разных операциях общее число литров варенья, естественно, может быть различным).

**II.** Попробуйте рассмотреть следующие обобщения той задачи.

**1)** У Карлсона есть *n = m*+1 банок с вареньем. В банках находится *s*, *s*+1, *s*+2, …, *s+m* литров варенья соответственно. Операция та же, что и в части **I** задачи. Рассмотрите и попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам **I.б)** и **I.в).** Рекомендуем начать решение с некоторых небольших значений *m*.

**2)** Пусть теперь у Карлсона *n* банок, в которых находится *s*1 < *s*2 < … < *sn* литров варенья (все значения – натуральные числа). Попробуйте решить пункты, аналогичные пунктам **I.б)** и **I.в).** Рекомендуем начать решение с небольших значений *n.*

**III.** Для обобщения предыдущих пунктов рассмотрите следующие направления:

**1)** Карлсон может съесть одинаковое целое количество литров из любых трех банок.

**2)** Карлсон необязательно съедает все варенье, т.е. он может оставить некоторое минимальное количество «несъеденного» варенья (в частях **I** и **II**, конечно, это не более одного литра).

**IV.** Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

**4. Задача аптекаря. («*можно начинать с 7-8 класса*»)**

1. Исходная постановка. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., *n* г (всего *n* штук). При каких *n* их можно ли их разложить их на 3 равные по весу кучки и как это сделать.
2. Общая постановка.
   1. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., *n* г (всего *n* штук). При каких *n* их можно ли их разложить их на *K* равных по весу кучек и как это сделать (*K* – некоторое натуральное число).
   2. У аптекаря есть набор гирек с весами 1 г, 2 г, 3 г, 4 г,..., *n* г (всего *n* штук). При каких *n* их можно ли их разложить их на *K* равных по весу кучек так, чтобы остались гирьки общей массой ровно *L* г, и как это сделать (*K* – некоторое натуральное число, *L –* заданное натуральное число).

**5. Задача о количестве острых и тупых углов (*начиная с 8 класса*).**

Чему равно наибольшее число острых углов в плоском (несамопересекающемся) *n-*угольнике? А чему может быть равно наименьшее число тупых углов?   
Примечания. Для второго вопроса возможно рассмотрение двух случаев: а) величина тупого угла лежит в интервале (90°;180° ), б) величина тупого угла лежит в интервале (90° ; 360°). Изменятся ли ответы во всех случаях, если вместе с острыми или соответственно тупыми углами рассматривать прямые углы?

А если на величины углов наложить какие-нибудь другие ограничения (предложите их сами)? А если *n-*угольник самопересекающийся?

Предложите свои вопросы для исследования в этой задаче и изучите их.

**8. Суммы углов самопересекающихся многоугольников (*начиная с 8 класса*).**

Для начала несколько определений. *Самопересекающийся* многоугольник – замкнутая ломаная линия, звенья которой могут пересекать друг друга. В противном случае многоугольник будет называться самонепересекающимся. Точки пересечения сторон многоугольника (или точки самопересечения) не являются его вершинами. Углами будем считать углы при вершинах многоугольника.

Сумму углов самопересекающегося многоугольника можно корректно определить, только для ориентированного многоугольника. Более точно:

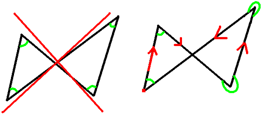
если каждой стороне многоугольника задать направление, т.е. указать, какую из двух определяющих ее вершин мы будем считать ее началом, а какую – концом, и притом так, чтобы начало каждой стороны было концом предыдущей, то получится *замкнутый многоугольный*

Рис. 1

*путь*, или *ориентированный многоугольник*.

В этом случае под его углом будем понимать угол между соседними сторонами, взятый с одной стороны (например, справа) относительно выбранного направления (см. рис. 1). Таким образом, сумму углов самопересекающегося многоугольника можно посчитать двояко («справа» относительно выбранного направления или «слева»).

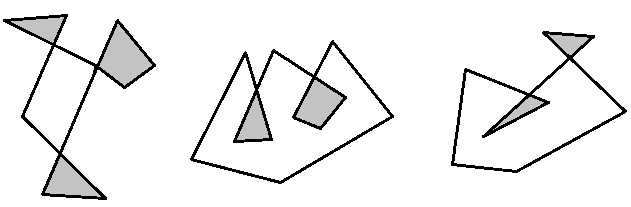
Рассмотрите задачу нахождения сумм углов самопересекающихся многоугольников в двух основных направлениях.

**Направление 1.** *Определение*1. Назовем точку самопересечения многоугольника *простой*, если часть многоугольного пути, определенного последовательными звеньями многоугольника, начинающаяся и заканчивающейся в этой точке, не имеет других точек самопересечения. Указанную часть многоугольного пути назовем *петлей* самопересекающегося многоугольника.

Петли могут быть двух видов: внешние и внутренние (см. на рис. 2).

*Определение*2. Самопересекающийся многоугольник назовем *многоугольником с петлями*, если он состоит из основной части (*основного многоугольника*) и нескольких петель. Основной многоугольник получается из самопересекающегося многоугольника с петлями отбрасыванием всех петель (отсечением петель в соответствующей точке самопересечения).

Для определенности выбор направления ориентированного многоугольника и углов будем далее осуществлять таким образом, чтобы в сумме углов учитывались внутренние углы основного многоугольника.

Рис. 2.

Задачи: 1.1) Найдите сумму углов самопересекающегося четырехугольника.

1.2) Найдите сумму углов самопересекающегося пятиугольника: а) с одной внешней петлей; б) с одной внутренней петлей.

1.3) Найдите сумму углов самопересекающегося *n*-угольника: а) с одной внешней петлей (двумя, тремя, … внешними петлями); б) с одной внутренней петлей (двумя, тремя, … внутренними петлями); в) с *m* внутренними и *k* внешними петлями.

1.4) Предложите свои задачи и обобщения в этом направлении и исследуйте их.

**Направление 2.** *Определение* 3. Назовем самопересекающийся многоугольник *правильным звездчатым*, если всего его стороны равны и каждая следующая повернута в одном и том же направлении, на один и тот же угол по отношению к предыдущей.

*Свойство* 1. Все вершины правильного звездчатого многоугольника лежат на одной окружности (окружности, описанной около него; *попробуйте это доказать*!).

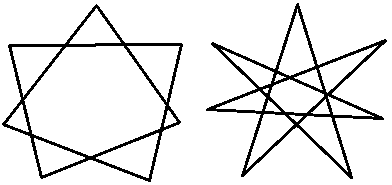
Существуют различные виды правильных звездчатых многоугольников даже с одинаковым количеством вершин (сторон). Будем обозначать их S(*п, k*), где *п* – число вершин (сторон) звездчатого многоугольника, *k* – через сколько вершин, расположенных на описанной окружности, находятся две его смежные вершины (т.е. соединенные одной стороной), если считать одну из этих смежных, *k* < *п*/2.

Рис. 3

Рис. 4

Например, для звездчатого семиугольника есть два различных вида: *S*(7, 2) и *S*(7, 3) (см. рис. 3 и 4).

**Задачи:** 2.1) Найдите сумму углов звездчатого пятиугольника.

2.2) Найдите сумму углов звездчатых семиугольников *S*(7, 2) и *S*(7, 3).

2.3) *Исследуйте общий вопрос*: для каких *п* и *k* существуют правильныезвездчатые многоугольники вида S(*п, k*). Найдите суммы углов таких многоугольников. (Для начала попробуйте рассмотреть хотя бы некоторые частные случаи.)

2.4) Предложите свои обобщения в этом направлении и исследуйте их.

*Предложите свои направления исследования этой задачи и изучите их.*

**6. Корни специального вида рациональных уравнений с целыми коэффициентами** (а также с рациональными коэффициентами и т.д.)

1. *Начальные задачи (не для конференции !!!).*
   1. Докажите, что для любого натурального числа *n*, не являющегося точным квадратом, число  - иррациональное число. (Начните доказательство с частных случаев, например, *n* = 2, 3, 5, 6, …, но попробуйте доказать утверждение для всех *n*.)
   2. (*Практическая задача*). Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь ковшами емкости и 2 – литров, перелить из одной из них в другую ровно 1 литр воды.
   3. Докажите, что число нельзя представить в виде , где *p, q, r* - рациональные числа.
2. *Первые обобщения.*
   1. Докажите, что выражение  нельзя представить в виде , где *А* и *В* – целые числа.
   2. Существуют ли такие рациональные числа *p, q, r, s,* что при некотором *n*

.

* 1. Докажите, что любую натуральную степень числа – 1 можно представить в виде , где *N* цело число. (Так, например, , а .)

1. *Применение к решению рациональных уравнений.*
   1. Известно, что уравнение  c рациональными коэффициентами имеет корнем число . Найдите остальные корни этого уравнения.
   2. Обоснуйте следующий алгоритм нахождения рациональных корней уравнения вида  с целыми коэффициентами (если они, конечно, существуют): если – рациональный корень такого уравнения, то он обязательно равен , где *p* – делитель свободного члена (т.е. ), а *q* – делитель . Распространите этот алгоритм на такие же уравнения с рациональными коэффициентами.
   3. Попробуйте определить корни вида , , …, , где *a, b* ∈ Q, таких уравнений (по крайней мере, постройте алгоритмы определения таких корней). Может, вы сможете определять корни более сложного вида (например, ,  и даже сложнее и т.п.)

Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

**7. Размещение тетрамино и пентамино** (задача 1-го М/нТЮМ, 2009)

0. *На самом деле начните не с тетрамино и пентамино, а с прямоугольников и уголков из трех клеток. Остальной согласно условию*!

А. Для данного прямоугольника *т* × *п* найти число Т(*т*, *п*) непересекающихся тетрамино разного вида (или пентамино, см. рис.), которые можно разместить (вдоль линий прямоугольника) так, чтобы не было свободного места для размещения ни одной дополнительной фигуры.

Рассмотрите задачу отдельно для каждой из следующих фигур:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | и другие. | | | | | |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Б. Два игрока играют на доске прямоугольной формы размером *т* × *п,* расставляя по очереди тетрамино (пентамино как в пункте А). Проигрывает тот, у которого нет хода. Исследуйте эту игру: кто выигрывает на конкретных досках, какой стратегии он должен придерживаться и т.п.

Или по другому:

А. Задача о неплотной расстановке пентамино

а) На клетчатой доске 6×6 вдоль линий клеток расставляются фигурки вида буквы Т (см. рис.) так, чтобы они не накладывались друг на друга (касаться углами или сторонами фигурки могут, а также их можно поворачивать на 90°, 180° или 270°). Расстановку фигурок назовем плохой, если на доску нельзя поставить никакой новой фигурки без нарушения указанных условий. Каким наименьшим количеством фигурок можно добиться плохой их расстановки?

б) Каким наименьшим количеством фигурок вы сможете добиться плохой их расстановки на доске 7×7.

в) Исследуйте общую задачу о максимально неплотной расстановке фигурок типа «пентамино» на прямоугольных досках *m* × *n* (оцените количественные характеристики таких упаковок, возможные методы и алгоритмы упаковок и т.п.).

г) Два игрока играют на доске *m* × *n* по следующим правилам: каждый из них по очереди выставляет, если возможно на доску пентамино. Кто выигрывает при правильной игре – начинающий или его соперник? Исследуйте игру при различных занчениях *m* и *n.*

д) Предложите свои направления или обобщения в этой задачи и исследуйте их.

*Ответы для первых двух пунктов*: а) Тремя фигурами. б) Тремя фигурами.

**8. Уравняем кучки** (***по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов***)

***Две исходные задачи:***

**1.0)** В трех кучках находится 22, 14 и 12 орехов. Требуется путём трёх перекладываний из одной (какой-то) кучки в некоторую другую уравнять число орехов в этих кучках, соблюдая при этом условие: из любой кучки разрешается перекладывать в другую кучку лишь столько орехов, сколько орехов в той кучке уже имеется.

**2.0)** У трех мальчиков (у Пети, Вани и Толи) есть по кучке фантиков. Общее число фантиков 120. Сначала Петя дал Ване и Толе столько фантиков, сколько у них было (каждому из них столько, сколько у того было). Затем Ваня дал Пете и Толе столько, сколько у них стало после первого перекладывания. И наконец, Толя дал Пете и Ване столько, сколько у них к этому моменту имелось (т.е. после второго перекладывания). В результате всем досталось поровну. Сколько фантиков было у каждого в начале?

***Более общие задачи:***

**1)** В трех кучках находится ***m, n*** и ***k*** орехов. Требуется путём нескольких перекладывании уравнять число орехов в этих кучках, соблюдая при этом условие: из любой (какой-то) кучки разрешается перекладывать в другую кучку лишь столько орехов, сколько в той их уже имеется. При каких значениях натуральных чисел ***m, n*** и ***k*** это возможно сделать. (Важно не только дать ответ, при каких значениях ***m, n*** и ***k*** можно, а при каких – нельзя, но и обосновать почему, в случае «можно» полезно описать алгоритм перекладываний).

**2)** Исследуйте задачу 2.0 для произвольного исходного числа *N* фантиков, а именно, при каких *N* мальчики могут поделить фантики поровну, а при каких – нет (ответ может зависеть от общего числа передачи фантиков от одного мальчика другим, а также от порядка передачи).

***Еще одна задача:***

**3)** В трех кучках находится ***m, n*** и ***k*** орехов. При тех же условиях перекладываний как в задаче 1 требуется опустошить одну из кучек. Попробуйте дать ответ на вопрос, при каких ***m, n*** и ***k*** это можно сделать и как? (Важно не только дать ответ, при каких значениях ***m, n*** и ***k*** можно, а при каких – нельзя, но и обосновать почему, в случае «можно» важно описать алгоритм перекладываний).

**4)** Попробуйте обобщить задачи 1) – 3) на несколько кучек (более трех, хотя бы в каких-то частных случаях).

**6)** Предложите свои обобщения в этой задаче и исследуйте их.

**9. Специальная делимость**  (***по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов***)

Начнем с классики:

1. Доказать, что найдётся число вида 1111…11100000…0000, делящееся нацелона 2014.
2. Доказать, что найдётся число, записываемое одними единицами, кратное 2013.
3. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на цифры 2021и кратное 2020?
4. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на цифры 2020 и кратное 2021?
5. Можно ли найти такую натуральную степень числа 3, которая оканчивается на …0001?

Попробуем обобщить:

1. Пусть P и Q – произвольные простые числа.
   1. Найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на Q и кратное P?
   2. Если да, то попробуйте найти наименьшее такое число.
   3. Попробуйте найти все числа, удовлетворяющие условию пункта 6.1.
2. Пусть A и B – произвольные натуральные числа.
   1. Для каких А и В найдется ли такое натуральное число, заканчивающееся на Ви кратное А?
   2. Для тех чисел А и В, для которых ответ пункта 7.1 положительный найдите наименьшее такое число.
   3. Попробуйте найти все числа, удовлетворяющие условию пункта 7.1.
3. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.Одно из возможных направлений в п. 6 и 7 рассмотреть возможность построения чисел, дающих при делении на Р и Асоответственно заданный остаток R. Некоторые новые направления могут быть могут быть придуманы исходя из пунктов 1, 2 и 5 начальной формулировки.

**10. Общая задача о переливаниях *(можно начинать с 7-8 класса, но в перспективе – очень сложная задача !!!)***

I. Незамкнутая система сосудов

I.1) *Исходная задача.* (Источник – Математический фольклор). Имеются два сосуда, объемом в 3 и 5 литров. Как получить с их помощью ровно 4 литра воды?

*Примечание.* Во всех пунктах задачи сосуды имеют неправильную форму, т.е. нельзя наливать или переливать «на глазок», имеется возможности наполнять сосуды из внешнего источника, переливать воду из сосуда в сосуд до края (т.е. до указанного максимального объема каждого сосуда) и выливать воду в раковину (т.е. имеется некий сток). Такие задачи будем называть задачами на переливание в *незамкнутой системе* сосудов.

I.2) Решите подобные задачи для сосудов 5 и 7 литров, 4 и 6 литров, при этом укажите алгоритм, с помощью которого можно получить все возможные объемы воды. Обоснуйте, почему некоторые из объемов не получаются.

I.3) *Общая постановка задачи*: Имеются два сосуда с объемами А и В литров, А, В – натуральные числа. Для каких натуральных значений С имеется возможность с помощью этих сосудов получить ровно С литров воды. Укажите множество возможных значений С и алгоритм получения этих значений.

I.4) Исследуйте такую же задачу для трех сосудов с объемами А, В и С (А < В < С), в которой требуется получить ровно D литров воды. Укажите множество всех возможных значений D и способы (алгоритмы) их получения.

I.5) Рассмотрите вопросы предыдущих пунктов для *n* сосудов.

I.6) Попробуйте исследовать различные подходы к решению этих задач на оптимальность, другими словами, попробуйте найти и обосновать самый короткий по числу переливаний алгоритм получения различных объемов воды. Начните изучение этого пункта со случая двух сосудов: в частности, попробуйте получить общую формулу числа требуемых операций (т.е. переливаний) в зависимости от А, В и С?

II. Замкнутая система сосудов

II. 1) Исследуйте аналогичную задачу для трех сосудов с объемами А, В и С (А < В < С), с той разницей, что в условиях переливания *нет источника и стока*, но самый большой по объему сосуд, полностью заполнен водой. Такие задачи будем называть задачами на переливание в *замкнутой системе*сосудов.

II. 2) Рассмотрите различные варианты задачи для *n* сосудов в случае замкнутой системы (предложите соответствующие определения и варианты самостоятельно).

III. Исследуйте другие (сопутствующие) вопросы в этих задачах, а также предложите свои обобщения или направления и изучите их.

**Лавринович Л.И.**

1. **Комбинаторика и вероятность на графе.** Путешественник Вася решил проехать по городам Беларуси. Будем считать, что два города соседние, если они соединены прямой дорогой (т.е. не проходящей через другие города). Вася находится в Минске. За день он может переехать в любой соседний город (даже в тот в котором он уже бывал). Через месяц он оказался в Радошковичах. Определить количество всевозможных путей Васи. А также вероятность того, что за этот меся Вася уже бывал в Радошковичах. (9-10 классы)
2. **ε-оптимальные многоугольники на целочисленной решетке.** Назовем правильный *n*-угольник ε-оптимальным (0<ε<0,5), если все его вершины лежат в ε-окрестности узлов целочисленной решетки, и при этом его площадь минимальна. Для каждого *n* найдите площади ε-оптимальных *n*-угольников, а также все их возможные расположения на решетке. (8-10 классы)
3. **Угадывание чисел.** Двое играют в игру: один задумывает некоторое число, второй называет *k* чисел из промежутка от 1 до *n*. Первый прибавляет к задуманному числу одно из них и говорит результат и т.д. Найти минимальное число ходов, за которое второй игрок сможет определить задуманное число. Та же задача, но первый игрок проводит другую операцию над числами (вычитает, умножает, делит, возводит в степень и т.д) (7-10 классы)
4. **Фигуры наибольшей площади.**  На координатной плоскости задать множество точек наибольшей площади, удовлетворяющее условию: для любых двух точек множества площадь треугольника с вершинами в начале координат и в .этой точке не превосходит . (9-10 классы)
5. **Графики с модулем.** Известно, что графиком фукции, содержащей модули от линейных выражений, является ломанная. 1. По ломанной восстановить функцию или уравнение ее задающее. 2. Определить наименьшее количество знаков модуля для задания этой ломанной. 3. Всякую ли ломанную можно задать с помощью линейного выражения с модулями. (7-10 классы)
6. **Квадраты в различных системах счисления.** Для данного числа N, записанного в десятичной системе счисления, определить существует ли такая система счисления, в которой число, записанное теми же цифрами, что и N, будет полным квадратом. Определить условия, когда не существует такой системы счисления. Если она существует, то определить единственна ли она. (7-9 классы)
7. **Числа в различных системах счисления.** Существуют числа, которые в различных системах счисления записываются одинаковым набором цифр. Например . Попытайтесь найти еще такие числа и системы счисления. Получите условия их существования. (7-9 классы)
8. **Крестики-нолики.** Двое играют в игру на бесконечном листе бумаги. За ход один ставит *N* крестиков в любом месте. Другой – *M* ноликов. Последующими ходами можно ставить крестики и нолики только в клетки с уже помеченными. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Исследовать выигрышные стратегии. (Квант 1971) (7-9 классы)

**Калинчук В.Н.**

**19.** Новая жизнь неравенств. (по этой задаче – отдельное представление, для 10 класс)

**20. Лампочки.**

а)В каждой клетке квадрата расположена лампочка, которая в любой момент времени находится в одном из двух состояний: горит или не горит. Нажав на любую лампочку, меняем ее состояние, а также всех лампочек, находящихся в той же строке и в том же столбце. За какое наименьшее число нажатий можно зажечь все лампочки, если вначале они все не горят. Решить задачу для:

б) прямоугольника

в) прямоугольного параллелепипеда если состояние меняется по трем направлениям

г) равностороннего треугольника если состояние меняется по трем направлениям

д) равнобедренного треугольника если состояние меняется по трем направлениям

е) произвольного треугольника если состояние меняется по трем направлениям

**21. Задача о средних.** Средне арифметическое действительных чисел равно 0, а средне арифметическое их квадратов равно 1. Какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел. Рассмотреть свои закономерности.

**22.** **ГМТ = геометрические места точек (разные направления)** Найти геометрическое место точек плоскости, из которых под прямым углом видны

а) парабола

б) эллипс

в) гипербола

г) рассмотрите другие кривые или другие углы

**С.М.Горский и А.А.Гингзбург**

**23. Лампочки.** В вершинах правильного *n*-угольника, в котором нарисованы все стороны и диагонали, расположены лампочки. Изначально, из имеющихся *n* лампочек, *k* горят. На каждом шаге разрешается стереть сторону или диагональ и изменить состояние лампочек на концах стороны (диагонали). Определите все возможные значения *k* для которых всегда возможно достичь состояния, при котором все лампочки горят и все диагонали стёрты.

**24. Длинный Пифагор.**

Для любого натурального n набор из n чисел назовем *суперквадратным*, если 1) ; 2) сумма является точным квадратом для любого (). Например, (12, 9, 8) — суперквадратный набор.

1. Найдите *t*, при котором набор (32, *t*, 9) будет являться суперквадратным.
2. Найдите суперквадратный набор (все) в котором .
3. Существует ли суперквадратный набор, состоящий из 2021 элемента?

**25. Бар «Мнимое разнообразие»**

I. Для приготовления коктейлей у бармена есть 2 ингредиента.

1. Сколько различных коктейлей может приготовить бармен, если 1) ингредиент, входящий в состав коктейля, должен занимать в стакане только кратное 10 число процентов от объема; 2) бармен считает два коктейля различными, если процентное содержание одного и того же ингредиента в них — различные числа.

2. Сколько различных коктейлей может приготовить бармен, если у него есть 3 ингредиента?

3. Сколько различных коктейлей может приготовить бармен, если у него есть *k*ингредиентов?

II. У бармена есть 3 ингредиента. Каждый коктейль описывается набором неотрицательных чисел , где . Два коктейля и являются различными, если . Сколько различных коктейлей может приготовить бармен, если a) , б) , в) в общем виде?

**26. Вокруг теоремы Пика**

Пусть на плоскости введена сетка (можно говорить, что сетку образуют прямые , , где ; точки пересечения данных прямых будем называть узлом сетки). *Клетчатым многоугольником* будем называть многоугольник без дырок, все вершины которого расположены в узлах сетки. Для вычисления площадей клетчатых многоугольников существует формула Пика:

где  — количество узлов внутри многоугольника,  — количество узлов, лежащих на сторонах многоугольника.

Рассмотрим куб, на гранях которого введена сетка. Верна ли, что для клетчатых многоугольников, расположенных на гранях куба (многоугольник не обязан располагаться на одной грани куба!) формула Пика? Если не верна, то предложите аналогичную формулу для таких многоугольников. Рассмотрите так же и более сложные поверхности: например, рассмотрите фигуру, которая получается вырезанием из куба прямоугольного параллелепида меньших размеров.

**Или по другому:**

**Обобщение формулы Пика**

Пусть  − многоугольник (не обязательно выпуклый) на плоскости с целочисленными вершинами (то есть обе координаты каждой вершины являются целыми числами). Обозначим через  количество целочисленных точек, расположенных внутри фигуры − количество целочисленных точек на границе  и наконец  − количество точек на границе или внутри . Известна формула Пика, которая вычисляет площадь :

.

Целью этой задачи является обобщение этой формулы на многомерный случай. Во всех пунктах задачи интересно получить соответствующие формулы в частных случаях (например, для фигур определенного вида: прямоугольных треугольников или тетраэдров, ромбов или прямоугольных параллелепипедов и т.п.).

0. Докажите формулу Пика.

1. Покажите, что формула Пика не допускает прямого обобщения на трехмерный случай, то есть объем  многогранника  с целочисленными вершинами не может быть выражен через числа  и  целочисленных точек внутри и на границе многогранника.

*Указание. Рассмотрите тетраэдр с координатами *.

Для любого натурального числа  обозначим через  фигуру, которая получается из  гомотетией с коэффициентом  и центром в начале координат. Определим функции .

2. Пусть  − многоугольник с целочисленными вершинами.

(a) Докажите, что   является квадратным полиномом от , то есть  для любого натурального числа , причем .

(б) Докажите, что 

В пунктах 3-5 фигура  является многогранником в трехмерном пространстве с целочисленными координатами.

3. Вычислите полиномы  и для следующих многогранников :

(a) куб с вершинами в точках  или ;

(b) тетраэдр с вершинами в точках ;

(c) октаэдр с вершинами в точках ;

(d) тетраэдр из указания к пункту 1.

(e) прямоугольная призма высотой 1, основанием которой является многоугольник с целочисленными координатами.

4. Докажите, что  является кубическим полиномом по , старший коэффициент которого равен объему . Какой геометрический смысл имеют остальные коэффициенты этого полинома?

5. Докажите, что 

6. Найдите полиномы  и  для -мерных аналогов куба, тетраэдра и октаэдра из пунктов 3a-3c.

7. Попробуйте обобщить пункты 4 и 5 на многомерный случай.

8. Предложите свои обобщения или направления исследования и изучите их (возможно, например, рассмотрение подобных вопросов для фигур расположенных на плоскости, покрытой треугольной решеткой, и т.п.).

*Литература*. А. Кушниренко, Целые точки в многоугольниках и многогранниках, Квант, N4, 1977, С.13-20.

**Разные задачи по теории графов (из заданий РТЮМ)**

**Задача 27. Локальная схожесть графов**

В задаче рассматриваются простые графы и используются общепринятые понятия теории графов (см., например [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.]).

Граф с *n* вершинами называется *помеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до *n*. Два помеченных графа считаются равными, если множества вершин и рёбер у них совпадают. Два графа называются *изоморфными*, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором графе и наоборот. Изоморфные графы естественно отождествлять, т. е. считать совпадающими, и говорить о них как об *абстрактном графе*. Можно также считать, что абстрактный граф получается из помеченного графа опусканием пометок.

Подграф *Н* графа *G* называется *подграфом*, *порожденным множеством вершин* {*v*1, *v*2, …, *vp*}, если он содержит только вершины *v*1, *v*2, …, *vp* и все рёбра графа *G*, соединяющие эти вершины. Для графа *G* и целого числа *k* ≥ 1 обозначим через *Nk*(*G*) мультимножество, в котором каждой вершине *v* графа *G* соответствует подграф графа, порождённых всеми вершинами на расстоянии не более *k* от *v* (считаем, что любая вершина графа отстоит от самой себя на расстояние 0). В качестве примера рассмотрим граф *G* на рис. 1. Для удобства вершины графа помечены, но сам он мыслится как абстрактный. Соответствующие мультимножества *N*1(*G*) и *N*2(*G*) имеют вид, представленный на рис. 2.

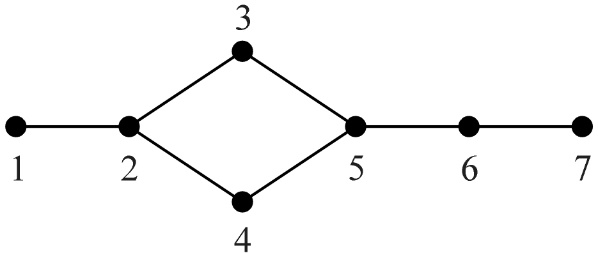


Рис. 1 к задаче № 10. Граф *G*

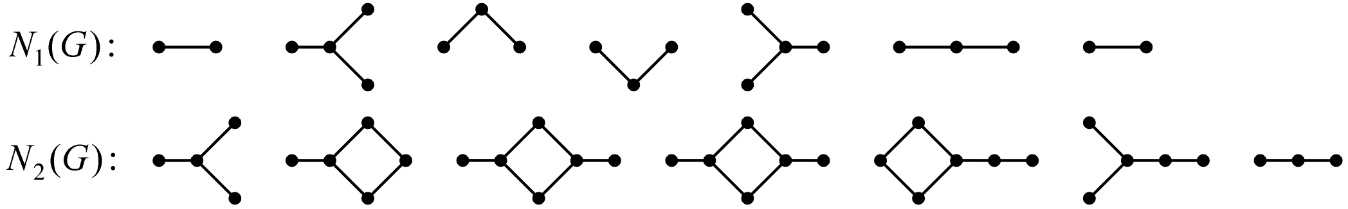


Рис. 2 к задаче № 10. Мультимножества *N*1(*G*) и *N*2(*G*)

Для целого числа *k* ≥ 1 назовём два абстрактных графа *G* и *H* *локально-k равными*, если совпадают мультимножества *Nk*(*G*) и *Nk*(*H*). *Локально*-0 *равными* назовём графы, у которых совпадают степенные последовательности. Два локально-*k* равных для целого неотрицательного числа *k* графа назовём *локально схожими порядка k* (или просто *локально схожими*). Если все подграфы из *Nk*(*G*) попарно изоморфны одному и тому же графу *H*, то граф *G* назовём *локально-k-H* *совершенным*.

Исследуйте следующие задачи.

0.0. Верно ли, что два графа изоморфны, если совпадают их степенные последовательности?

0.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-0 равных неизоморфных графа.

0.2. Перечислите все попарно неизоморфные графы с числом вершин меньше 6 и исследуйте их на локальную схожесть. Найдите все попарно неизоморфные графы со степенными последовательностями (2, 2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 3, 3, 3, 3) и обоснуйте, что других таких графов нет.

1.0. Верно ли, что из локально-1 равенства следует изоморфизм графов? Верно ли, что из локально-1 равенства следует локально-0 равенство?

1.1. Найдите наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-1 равных неизоморфных графа. Приведите ответ на этот вопрос при условии, что рассматриваемые графы являются связными.

1.2. Пусть *G*1 и *G*2 – два локально-1-*H* совершенных графа с одинаковым числом вершин. Следует ли отсюда изоморфизм графов *G*1 и *G*2? Найдите граф *H* с наименьшим числом вершин, для которого существуют два локально-1-*H* совершенных неизоморфных графа с одинаковым числом вершин.

2. Верно ли, что для какого-либо целого неотрицательного числа *k* из локально-*k* равенства графов следует их изоморфизм? Приведите соответствующие контрпримеры. Исследуйте этот же вопрос в классе связных графов.

3. Верно ли, что из локальной схожести какого-либо порядка следует локальная схожесть меньших порядков? Верно ли, что если два графа локально схожи, то локально схожи и их дополнения?

4. Попробуйте найти все графы *H* с числом вершин меньше 7, для которых существуют локально-1-*H* совершенные графы.

5. Пусть  – наименьшее число вершин, которое могут иметь два локально-*k* равных неизоморфных графа;  – то же для связных графов. Найдите значения *ξ* и *ψ* для некоторых *k*. Попытайтесь оценить величины *ξ* и *ψ* и исследуйте точность своих оценок.

Предложите свои направления исследования в этой задаче и изучите их.

**Задача 28. Декомпозиции графов**

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в задаче, можно найти в книге [Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.].

*Графом* называется пара *G* = (*V*, *E*), где *V* – некоторое непустое конечное множество, *E* – множество неупорядоченных пар различных элементов из *V*. Элементы множества *V* называются *вершинами* графа, элементы множества *E* – его *рёбрами*. Множество вершин графа *G* будем обозначать через *V*(*G*), множество его рёбер – *E*(*G*). Граф *Н* называется *подграфом* графа *G*, если вершины и рёбра *Н* принадлежат *G*. Подграф *Н* графа *G* называется *подграфом, порождённым множеством рёбер* {*е*1, *е*2, …, *еp*}, если он содержит только рёбра *е*1, *е*2, …, *еp* и все вершины графа *G*, являющиеся концами этих рёбер. Число вершин графа *G*, смежных с вершиной *u*, называется *степенью* этой вершины и обозначается через deg *u*.

Пусть *G* – граф. *Декомпозицией графа* *G* называется множество попарно непересекающихся по рёбрам подграфов *G*1, *G*2, …, *Gk* этого графа, таких, что каждое ребро графа *G* содержится ровно в одном из этих подграфов. Иначе говоря, множество *E*(*G*) рёбер графа *G* можно разбить на подмножества *E*1, *E*2, …, *Ek* такие, что *Ei* ∩ *Ej* = ∅ при 1 ≤ *i* ≠ *j* ≤ *k*,

*E*1 ∪ *E*2 ∪ … ∪ *Ek* = *E*(*G*)

и подграф графа *G*, порождённый рёбрами из *Ei*, изоморфен *Gi*, *i* =1, 2, …, *k*.

*Задача о декомпозиции графа* *G* заключается в следующем: заданы граф *G* и графы *G*1, *G*2, …, *Gk*. Выяснить существует ли декомпозиция графа *G* на подграфы *G*1, *G*2, …, *Gk*? Наиболее интересный случай описывается условием, когда все графы *G*1, *G*2, …, *Gk* попарно изоморфны, т. е. представляют собой по сути один и тот же граф *H*. В этом случае, если граф *G* допускает декомпозицию на подграфы *G*1, *G*2, …, *Gk*, то она называется *Н-декомпозицией*. Например, на рис. 1 приведена *Р*4-декомпозиция графа, изображенного на этом рисунке первым (здесь *Р*4 – простая цепь на четырёх вершинах).

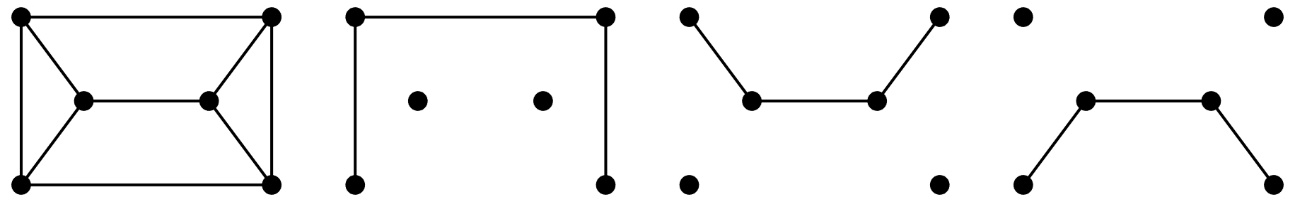


Рис. 1 к задаче № 9. *Р*4-декомпозиция графа

Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует соединяющая их цепь. Связный граф, в котором отсутствуют циклы, называется *деревом*. Граф называется регулярным степени *r*, если все его вершины имеют степень *r*. Регулярные графы степени 3 называются *кубическими*.

Исследуйте следующие задачи.

1) Докажите, что если граф *G* допускает *Н*-декомпозицию, то число *|E*(*G*)| рёбер графа *G* делится нацело на число |*E*(*Н*)| рёбер графа *Н*. Верно ли обратное утверждение?

2) Пусть граф *G* допускает *H*-декомпозицию, *k* = |*E*(*G*)|/|*E*(*H*)|, и пусть *M* – мультимножество мощности *|V*(*H*)*|*⋅*k*, которое для каждой вершины *x* ∈ *V*(*H*) содержит число deg *x* ровно *k* раз. Какому дополнительному условию должно удовлетворять мультимножество *M*?

3) Докажите, что если *r*-регулярный граф *G* допускает *H*-декомпозицию, то НОД{deg *x* : *x* ∈ *V*(*H*)} делит число *r*. Верно ли обратное утверждение?

4) Приведите пример графа *G* и двух неизоморфных деревьев *H*1 и *H*2 с совпадающими степенными последовательностями, для которых граф *G* допускает *Н*1-декомпозицию и не допускает *Н*2-декомпозицию.

5) Найдите все деревья *Н*, для которых кубические графы: a) граф куба, б) граф Петерсена (см. рис. 2) допускают *Н*-декомпозицию?

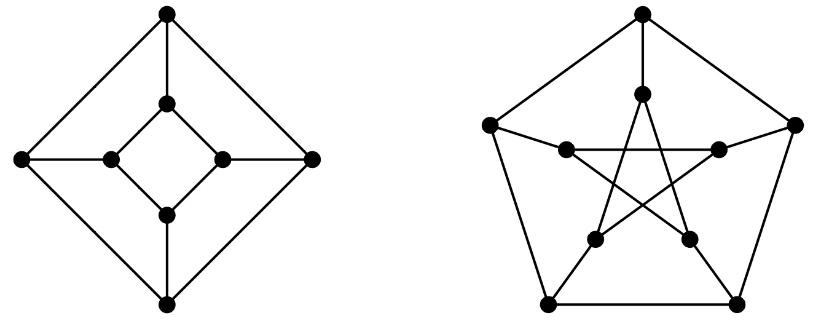


Рис. 2 к задаче № 9. Граф куба (слева) и граф Петерсена (справа)

6) Докажите, что для каждого целого числа *s* ≥ 5 произвольный кубический граф не допускает *Ps*-декомпозиций (*Рs* – простая цепь с *s* вершинами).

7) Установите необходимые и достаточные условия существования *Ps*-декомпозиции произвольного кубического графа, где *s* ∈ {3, 4}. Предложите эффективные алгоритмы построения таких декомпозиций (число шагов алгоритма должно полиномиально зависеть от числа вершин кубического графа).

8) Выясните, какие кубические графы допускают *K*1, 3-декомпозицию (здесь *K*1, 3 – *звезда*, т. е. дерево со степенями вершин 3, 1, 1, 1)?

9) Пусть *T* – множество всех попарно неизоморфных деревьев, число вершин которых не превосходит 6. Для каждого дерева *H* ∈ *T* установите необходимые и достаточные условия существования *H*-декомпозиции произвольного кубического графа. Попробуйте исследовать этот же вопрос для произвольного *r*-регулярного графа при *r* ≥ 4.

10) Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

**Задача 29. Порождённые подграфы**

Введение. *Обыкновенным графом* называется упорядоченная пара *G* = (*V*, *E*), где *V* – некоторое непустое конечное множество, *E* – множество неупорядоченных пар различных элементов из *V*. Элементы множества *V* называются *вершинами* графа, элементы множества *E* – его *рёбрами*. Множество вершин графа *G* будем обозначать через *V*(*G*), множество рёбер – *E*(*G*). Число |*V*(*G*)| вершин графа *G* называется его *порядком* и обозначается |G|. Говорят, что две вершины *u* и *v* графа *смежны*, если множество {*u*, *v*} является ребром и *не смежны* в противном случае. Два графа называются *изоморфными*, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными (несмежными) в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными (несмежными) во втором графе и наоборот.

Пусть задан граф *G* и в нём выбрано непустое подмножество вершин *U* ⊆ *V*(*G*). Рассмотрим подграф  графа *G*, где  состоит из всех тех рёбер графа *G*, у которых оба конца принадлежат *U*. Говорят, что этот подграф *порождён множеством вершин* *U* и называют его просто *порождённым подграфом*. *Дополнением* к графу *G* называется граф , который имеет такое же множество вершин, что и граф *G*, и две различные вершины смежны в графе  тогда и только тогда, когда они не смежны в графе *G*.

Обозначим через *G2* – *квадрат* графа *G* – граф с множеством вершин *V*(*G*), в котором две несовпадающие вершины смежны, если и только если расстояние между ними (наименьшая из длин цепей, соединяющая эти вершины) в графе *G* не более 2. (Примечание. Все стандартные обозначения и понятия теории графов, которые встречаются далее, можно найти в книге: Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.)

Будем обозначать через  (читается как «тета от жэ») число всех попарно неизоморфных порождённых подграфов графа *G*, а через  (читается как «эта от жэ») число всех попарно неизоморфных связных порождённых подграфов графа *G*. Например, ,  и , где  и  – полный граф и простая цепь порядка 3 соответственно.

Постановка задачи. Исследуйте следующие задачи.

1) Для каких графов *G* выполняется равенство ?

2) Найдите значения величин:

(*а*)  и , где *G* – граф трёхмерного куба и граф октаэдра (см. рисунок);

(*б*)  и , где  – звезда порядка ;

(*в*)  и , где  – объединение  вершинно-непересекающихся полных графов  порядка ;

(*г*)  и , где  – простая цепь порядка *n*, ;

(*д*)  и  для всех попарно неизоморфных графов *G* порядка не выше 5;

(*е*)  и , где  – простая цепь порядка .



Рис. Граф куба (слева) и граф октаэдра (справа)

3) Докажите, что для любого графа *G* справедливо равенство . Для любого ли графа *G* справедливо равенство ? Если ответ на вопрос отрицательный, то найдите все попарно неизоморфные графы *G* порядка не выше 5, для которых .

4) Пусть *G* и *H* – вершинно-непересекающиеся графы. Докажите или опровергните следующие утверждения:

(*а*) если *G* – простая цепь порядка не меньше 4 или простой цикл порядка не меньше 5, то ;

(*б*) если , то .

Какие из утверждений верны в обратную сторону? Ответ обоснуйте.

5) Найдите все натуральные числа *n*, , для которых существует пара таких связных неизоморфных графов *G* и *H*, что  и

(*а*) ;

(*б*) , .

6) Пусть  – натуральное число, для которого существует граф *G* с условием .

(*а*) Докажите, что существует граф *H* такой, что ,  и

.

(*б*) Предложите оценки в терминах числа  на максимальное (минимальное) число вершин, которое может содержать граф *G*.

7) Попытайтесь найти нижние и верхние оценки параметров ,  и исследуйте их достижимость. Например, для графа *G* порядка *n* имеет место простая верхняя оценка , где  – биномиальный коэффициент и *g*(*i*) – число попарно неизоморфных графов порядка *i*.

8) Предложите обобщения параметров  и , например, для случаев, когда

(*а*) *G* – мультиграф (граф с кратными рёбрами);

(*б*) речь идёт не о подграфах, порождённых подмножествами вершин, а о подграфах, порождённых подмножествами рёбер.

Исследуйте свойства предложенных параметров.

**Задача 30. Изопериметрические неравенства в графах**

Основные понятия, определения, обозначении этой задачи соответствуют теме предыдущей задачи (см. № 9. Порождённые подграфы)и могут быть взяты из ее формулировки (так же как и ссылка на литературу).

I. Пусть *G* = (*V*, *E*) – неориентированный граф без петель и кратных ребер, *А* – непустое подмножество его вершин такое, что . Введем понятие границ множества *А*:

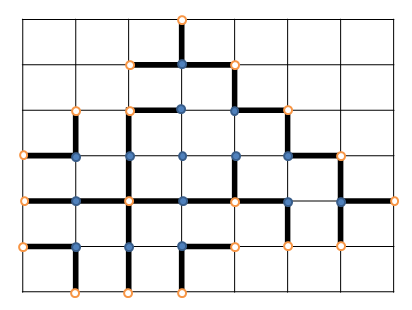
*Вершинной границей* множества вершин *А* назовем множество  = , где *N(v)* – множество вершин графа *G*, смежных с вершиной *v*.



*Реберной границей*  назовем множество ребер, один конец которых лежит в *A*, а другой – нет.



Примеры. 1) На приведенном рисунке изображены: исходный граф – квадратная решетка 6×7, закрашенные точки – множество *А*, проколотые точки – вершинная граница, жирные ребра – реберная:



2) Рассмотрим граф *G*, который является циклом на 5 вершинах. Легко видеть, что  при , ,  при .

I.1. Найдите множества значений или их оценки для мощностей границ в зависимости от |*А*| в следующих графах:

I.1.1. а) цикл на 7 вершинах; б) цикл на *n* вершинах;

I.1.2. а) полный 2-дольный граф; б) полный *p*-дольный граф;

I.1.3. дерево;

I.1.4. треугольная решетка на плоскости;

I.2.  Докажите, что для графов, имеющих структуру, указанную в следующих пунктах, выполняются следующие оценки:

а) для *n*-мерного куба: ;



б) для прямоугольной решетки размера *k* × *k*: ;



в) для конечной шестиугольной решетки на плоскости: .



Попробуйте оценить мощности вершинных границ для этих графов.

II. *Реберной изопериметрической постоянной* называется величина . Аналогично можно ввести вершинную изопериметрическую постоянную . Попробуйте получить точные значения или оценки на изопериметрическую постоянную графов из пункта I, например:

II.1. Докажите, что:

а) для цикла на *n* вершинах реберная изопериметрическая постоянная равна ;

б) для *n*-мерного куба  *hE* (*G*) = 1;

в) для полного двудольного графа с долями *m* и *n* постоянная .

II.2. Декартовым произведением графов *G1* и *G2* называется граф *Н*, в котором:

- множество вершин является декартовым произведением множеств вершин *V(G1) × V(G2)*;

- ребро между *(u1,v1)* и *(u2,v2)* существует тогда и только тогда, когда *u1*= *u2* и *v1* смежна с *v2*, или наоборот.

Докажите, что если *Pk* – цепь на *k* вершинах, а *G* – связный граф на *k* вершинах, то *hE* (*Pk ×G*) = *hE* (*Pk*). А если *G* – произвольный связный граф?

II.3. Исследуйте изопериметрические постоянные для декартовых произведений других графов, связь между двумя типами этих постоянных.

III. Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.

**Гончаренко А.Д.**

**Задача 31. Биномиальные коэффициенты и простые числа. (10-11 класс)**

Пусть – подмножество положительных целых чисел. Целое число будет называться *S-составным*, если для каждого , биномиальный коэффициент делится хотя бы на одно число из . Взяв положительное целое число , будет считать, что является *-составным*, если оно является *S-составным* для некоторого множества , состоящего только из простых чисел.

Для через обозначим наибольшее простое число. Пусть .

* + - 1. Найдите все целые , которые являются

1. *-составным*, где для простых ;
2. -составным.
   * + 1. Предположим, что состоит ровно из простых чисел.
3. Докажите, что существует бесконечно много положительных целых чисел, которые являются *-составным.*
4. Верно ли, что существует бесконечно много положительных целых чисел, которые не являются *-составным*?
   * + 1. Докажите, что является -*составным* в следующих случаях:
5. , где является простым и это неотрицательное целое число;
6. можно разложить на простые множители , так, что , для которых справедливо, что и ;
7. , где – простое число, не делится на , а достаточно велико.
   * + 1. Пусть – целое положительное число, которое можно представить в виде разложения на простые множители , так что и . Докажите, что является *-составным* в следующих случаях:
8. четно и не является степенью , и ;
9. ;
   * + 1. Предложите свои обобщения, а так же исследуйте их.

**еще Задворный Б.В. и другие**

**Задача 32. Задача о дружбах, рукопожатиях и улыбках.** (***по мотивам из заданий ТЮМ 5-7 классов***)

1) *Исходная задача.* В седьмом классе некоторой школы каждый мальчик дружит с 5-ю девочками и 6-ю мальчиками, а каждая девочка дружит с 6-ю мальчиками и 5‑ю девочками. А) Сколько школьников учится в этом классе, если известно, что их не более тридцати? Б) А если их не более 35?

2) Перед началом уроков классный руководитель заметил, что каждый учащийся его класса поздоровался за руку с шестью девочками и восемью мальчиками. При этом количество рукопожатий между мальчиками и девочками было на пять меньше числа остальных рукопожатий. Сколько учеников в классе?

3) На олимпиаду по математике прибыло несколько учащихся 8 класса. Некоторые из них оказались уже знакомыми. При встрече Маша улыбнулась своему знакомому Саше, а Коля улыбнулся незнакомой ему девочке Оле. И вообще, каждая восьмиклассница улыбнулась каждому знакомому ей восьмикласснику, а каждый восьмиклассник улыбнулся незнакомой ему восьмикласснице. В результате было зафиксировано 155 улыбок. Сколько всего учащихся 8 класса участвовало в олимпиаде?

4) *Общая постановка*. Исследуйте задачи 1) – 3) при различных значениях параметров (числа дружб, рукопожатий, улыбок и проч.), или более подробно:

А) пусть в первом пункте каждый учащийся дружит с М мальчиками и N девочками, изучите возможные количества детей в классе (школе и т.п.), а также когда подобные ситуации невозможны;

Б) в пункте 2) помимо условий, указанных в обобщении А, рассмотрите различные значения разностей между рукопожатиями различных групп детей,

В) во всех пунктах и условиях предложите свои значения параметров (или задайте другие – свои параметры) и изучите разрешимость задач в этих случаях.

5) Предложите свои обобщения и направления исследования в этой задаче и изучите их.